АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Огуленко А. П.

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

Временная шкала $\mathbb{T}$ — непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел.

1) оператор перехода вперед:

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\};$$

2) оператор перехода назад:

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\},$$

(при этом полагается $\inf\varnothing = \sup\mathbb{T}$ и $\sup\varnothing = \inf\mathbb{T}$);

3) функция зернистости

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Поведение операторов перехода вперед и назад в конкретной точке временной шкалы определяет тип этой точки.

Классификация точек временной шкалы

t справа рассеянная	$t < \sigma(t)$
t справа плотная	$t = \sigma(t)$
t слева рассеянная	$\rho(t) < t$
t слева плотная	$\rho(t) = t$
t изолированная	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t плотная	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Определим множество $\mathbb{T}^\kappa$ следующим образом:

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{M\}, & \text{если } \exists \text{ справа рассеянная точка } M \in \mathbb{T}: \\ & M = \sup \mathbb{T}, \quad \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее полагаем $[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}$.

Примеры временных шкал

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$
  $\sigma(t) = \rho(t) = t,\ \mu(t) = 0$
- $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$
  $\sigma(t) = t + 1,\ \rho(t) = t - 1,\ \mu(t) = 1$
- $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk, k \in \mathbb{Z}\}$
  $\sigma(t) = t + h,\ \rho(t) = t - h,\ \mu(t) = h$
- $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}} = \left\{q^k, k \in \mathbb{N}\right\}, q > 1$
  $\sigma(t) = qt,\ \rho(t) = \frac{t}{q},\ \mu(t) = (q-1)\,t$
- $\mathbb{T} = \{H_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, где $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n \in \mathbb{N},\ H_0 = 0$
  $\sigma(H_n) = H_{n+1},\ \rho(H_n) = H_{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$ и
  $\rho(H_0) = H_0$

  $\mu(t) = H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$

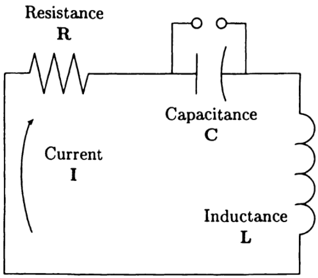
Примеры временных шкал

$$\mathbb{T} = \mathbb{P}_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a], \; a, b > 0$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a) \\ t+b, & \text{если } t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a) \\ b, & \text{если } t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

Примеры временных шкал



$$\mathbb{P}_{1-\delta,\delta} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} [k, k+1-\delta]$$

δ — время разрядки конденсатора
$Q(t)$ — заряд на конденсаторе
$I(t)$ — сила тока в цепи

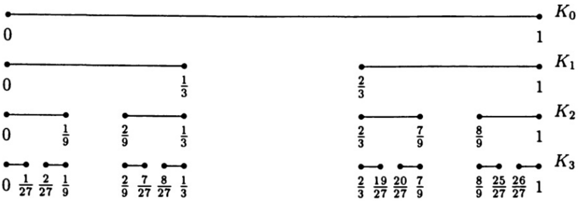
$$Q^{\Delta}(t) = \begin{cases} bQ(t), & \text{если } t \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{k-\delta\} \\ I(t), & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Здесь b — константа, $-1 < b\delta < 0$.

$$I^{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{k-\delta\} \\ -\dfrac{1}{LC}Q(t) - \dfrac{R}{L}I(t), & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Примеры временных шкал

$\mathbb{T} = C = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ — канторово множество



Каждое число $x \in [0, 1]$ можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \, a_k \in \{0, 1, 2\}, \, k \in \mathbb{N}.$$

Введем множества

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{m+1}}, \, m \in \mathbb{N}, \, a_k \in \{0, 2\}, \, 1 \leqslant k \leqslant m \right\},$$

$$R = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{2}{3^{m+1}}, \, m \in \mathbb{N}, \, a_k \in \{0, 2\}, \, 1 \leqslant k \leqslant m \right\}.$$

Примеры временных шкал

Нетрудно показать, что L состоит из справа рассеянных точек шкалы C, а R состоит из слева рассеянных точек:

$$\sigma(t) = \begin{cases} t + \dfrac{1}{3^{m+1}}, & \text{если } t = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{m+1}} \in L, \\ t & \text{если } t \in C \setminus L, \end{cases}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{3^{m+1}}, & \text{если } t = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{m+1}} \in L, \\ 0 & \text{если } t \in C \setminus L. \end{cases}$$

Канторово множество не содержит ни одной изолированной точки.

Определение. Пусть $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Число $f^{\Delta}(t)$ называется **Δ-производной** функции f в точке t, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки t (т.е. $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}, \delta < 0$), что

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Определение. Если $f^{\Delta}(t)$ существует $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, то $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется **Δ-дифференцируемой** на $\mathbb{T}^{\kappa}$.
Функция $f^{\Delta}(t) : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ называется дельта-производной функции f на $\mathbb{T}^{\kappa}$.
Если f дифференцируемая в t, то

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Определение. Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется **регулярной**, если во всех плотных справа точках временной шкалы $\mathbb{T}$ она имеет конечные правосторонние пределы, а во всех слева плотных точках она имеет конечные левосторонние пределы.

Определение. Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется *rd*-**непрерывной**, если в справа плотных точках она непрерывна, а в слева плотных точках имеет конечные левосторонние пределы. Множество таких функций обозначается $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$, а множество дифференцируемых функций, производная которых *rd*-непрерывна, обозначается как $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T})$.

Определение. Функцию $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ будем называть **регрессивной**, если $1 + \mu(t)f(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Множество регрессивных и *rd*-непрерывных функций обозначается $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Пример нарушения условия регрессивности

Рассмотрим линейную задачу Коши

$$x^{\Delta} = a(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Если $a(t) \notin \mathcal{R}$, то найдется такой момент времени $t^* \in \mathbb{T}$, что $1 + \mu(t^*)a(t^*) = 0$. В следующий момент времени имеем

$$\begin{aligned} x(\sigma(t^*)) &= x(t^*) + \mu(t^*)x^{\Delta}(t^*) = \\ &= x(t^*)\left(1 + \mu(t^*)a(t^*)\right) = 0. \end{aligned}$$

Вследствие этого $x(\sigma^2(t^*)) = 0$ и так далее.

Динамическая система приходит (и далее остается) в «неестественное» состояние равновесия: непрерывный аналог этой системы не несет в себе никаких предпосылок для внезапной остановки движения.

Свойство регрессивности следует также требовать при возникновении необходимости строить решение на отрезке шкалы $[a, b]$ влево от точки t_0 ($a < t_0 \leqslant b$, точка a может быть началом шкалы).

Как показано в **Bohner2001**, функции p из класса $\mathcal{R}$ можно поставить в соответствие функцию $e_p(t, s)$, которая по своим свойствам является аналогом экспоненты, определенной на $\mathbb{R}$.

Определение. Для любой регулярной функции $f(t)$ существует функция F, дифференцируемая в области D такая, что $F^{\Delta}(t) = f(t), \forall t \in D$. Эта функция называется **пред-первообразной** для $f(t)$ и определяется неоднозначно.

Неопределенный интеграл на временной шкале имеет вид:

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

где C — произвольная константа, а $F(t)$ — пред-первообразная для $f(t)$.

Если $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ выполняется $F^{\Delta}(t) = f(t)$, где $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ — rd-непрерывная функция, то $F(t)$ называется **первообразной** функции $f(t)$.

Если $t_0 \in \mathbb{T}$, то $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$ для всех t.

Определенный Δ-интеграл для любых $r, s \in \mathbb{T}$ определяется как $\int\limits_{r}^{s} f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$.

Сформулируем задачу Коши на временной шкале. Пусть задано уравнение

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{T}.$$

Функция $x(t)$ называется решением этого дифференциального уравнения,
если $x(t) \in C^1_{rd}([t_0, +\infty) \cap \mathbb{T})$ и при подстановке ее в уравнение последнее превращается в тождество. Если, кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет заданному начальному условию

$$x(t_0) = x_0,$$

то она называется решением соответствующей начальной задачи или задачи Коши.

Определение. Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала и X — банахово пространство. Функцию $f : \mathbb{T} \times X \to X$ будем называть:

- **rd-непрерывной**, если функция $g(t) = f(t, x(t))$ rd-непрерывна для любой непрерывной функции $x : \mathbb{T} \to X$;
- **ограниченной в области** $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если $\exists M > 0$ такая, что $\|f(t,x)\| \leq M$ для любой точки $(t,x) \in Q$;
- **липшицевой в области** $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\| \quad \forall (t,x_1), (t,x_2) \in Q .$$

Аналог теоремы Боголюбова для динамических уравнений с малым параметром на временных шкалах

Рассмотрим динамическую систему вида

$$x^{\Delta} = \varepsilon X(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $X(t, x)$ — n-мерная вектор-функция, $t \in \mathbb{T}$ — время, заданное временной шкалой. Поставим ей в соответствие следующую систему:

$$\xi^{\Delta} = \varepsilon \overline{X}(\xi) \quad \xi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

$$\overline{X}(x) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} X(t, x) \Delta t. \tag{3}$$

Теорема. Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$ выполнены следующие условия:

1) функция $X(t,x)$ rd-непрерывна по t, регрессивна и для нее выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши, причем $\forall (t,x) \in Q\ \|f(t,x)\| \leqslant M,\ M > 0$, $f(t,x)$ липшицева по x с константой $\lambda > 0$;
2) предел (3) существует равномерно относительно $x \in D$;
3) решение $\xi(t)$ усредненной системы (2) с начальным условием $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}^\kappa$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;
4) существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}^\kappa$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta\ , \tag{4}$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Усреднение управляемых систем

Рассмотрим динамическую систему стандартного вида

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = \varepsilon\left[f(t, x(t)) + A(x(t))\varphi(t, u(t))\right] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $t \in \mathbb{T}$ — время, $\mathbb{T}$ — временная шкала — непустое замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, x^{Δ} — Δ-производная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f(t, x)$ — n-мерная вектор-функция, $A(x)$ — $n \times m$ матрица, $\varphi(t, u)$ — m-мерная вектор-функция, $u(t) \in U$ — r-мерный вектор управления, $U \in comp(R^r)$, $t_0 \geqslant \inf \mathbb{T}$.

Поставим (5) в соответствие следующую систему:

$$\begin{cases} \xi^{\Delta} = \varepsilon \left[\bar{f}(\xi) + A(\xi)\, v \right] \\ \xi(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\bar{f}(\xi) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} f(t,\xi)\Delta t,$$

$$v \in V, \quad V = \lim_{\substack{T\to\infty \\ T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t,U)\Delta t. \tag{7}$$

Алгоритм соответствия управлений в исходной и усредненной системах ($v \to u$)

Управлению $v(t) \in V$ поставим в соответствие управление $u(t) \in U$ следующим образом:

a) зададимся некоторым δ–разбиением временной шкалы $\mathbb{T}$, точки которого обозначим t_i;

b) вычислим точки $v_i = \dfrac{1}{t_{i+1} - t_i} \displaystyle\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)\Delta s$,

$i = 0, 1, 2, \dots;$

c) строим управление $u(t) = \{u_i(t), t_i \leqslant t < t_{i+1}\}$, где $u_i(t)$ находится из условия

$$u_i(t) = \arg\min_{u(t)\in U} \left\| \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t, u(t))\Delta t - v_i \right\|$$

Управление $u_i(t)$ находится неоднозначным образом.

Алгоритм соответствия управлений в исходной и усредненной системах ($u \to v$)

Управлению $u(t) \in U$ поставим в соответствие управление $v(t) \in V$ следующим образом:

a) зафиксируем δ–разбиение $\mathbb{T}$, определенное выше;

b) вычислим точки $w_i = \dfrac{1}{t_{i+1} - t_i} \displaystyle\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t, u_i(t))\Delta t$, $i = 0, 1, 2, \ldots;$

c) строим управление $v(t) = \{v_i, t_i \leqslant t < t_{i+1}\}$, где $v_i(t)$ находится из условия

$$v_i = \operatorname*{argmin}_{v \in V} \|w_i - v\|$$

Управление v_i находится неоднозначным образом.

Теорема. Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^r\}$ выполнены следующие условия:

1) функция $f(t,x)$ rd-непрерывна по t, регрессивна и для нее выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши, причем $\forall (t,x) \in Q \ \|f(t,x)\| \leqslant M$, $M > 0$, $f(t,x)$ липшицева по x с константой $\lambda > 0$;
2) функция $A(x)$ удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ и ограничена константой M;
3) функция $\varphi(t,u)$ rd-непрерывна по t и непрерывна по u, ограничена константой M;
4) для любых допустимых управлений $v(t)$ решения $\xi(t)$ усредненной системы (5) с начальным условием $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью лежит в области D;
5) существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}^\kappa$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.

Тогда для любых $0 < \eta \leqslant \rho$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0\,(\eta, L) > 0$ и такое $\delta_0 > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливы следующие утверждения:

1. Для любого допустимого управления $u(t) \in U$ системы (5) существует управление $v(t)$ системы (6) такое, что
$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta, \tag{8}$$
где $x(t)$ — решение системы (5), порожденное управлением $u(t)$, а $\xi(t)$ — решение системы (6), порожденное управлением, $v(t)$.
2. Для любого допустимого управления $v(t)$ системы (6) существует управление $u(t)$ системы (5) такое, что справедливо (8).

Пример применения алгоритма

Пусть управляемая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x^{\Delta} = \varepsilon\left[x\sin^2(t) + \sin(x)u(t)\cos^2(t)\right], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Управление берется из множества $U = [-1, 1]$.
Это система стандартного вида, где

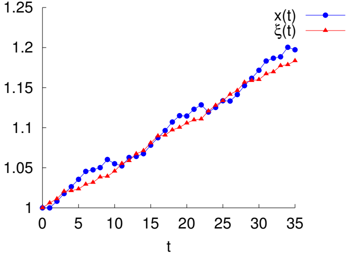
$$f(t,x) = x\sin^2(t),$$
$$A(x) = \sin(x),$$
$$\varphi(t, u(t)) = u(t)\cos^2(t).$$

Пусть $\mu(t) \equiv 1$, т.е. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.
Находим усредненную управляемую систему

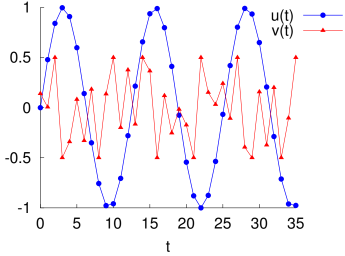
$$\begin{cases} \xi^{\Delta} = \varepsilon \left[\dfrac{\xi}{2} + \sin(\xi)\, v(t) \right], \\ \xi(0) = 1, \end{cases}$$

причем $v(t) \in V = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right]$. Для произвольного допустимого управления $u(t)$ исходной системы в соответствии с алгоритмом получаем, что в произвольной точке $t_i \in \mathbb{T}$

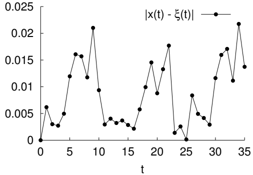
$$v(t_i) = \arg\min_{v \in V} \left| u(t_{i+1}) \cos^2(t_{i+1}) - u(t_i) \cos^2(t_i) - v \right|.$$



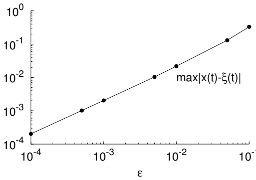
a) Траектории движения исходной и усредненной систем



b) Управление исходной и усредненной систем

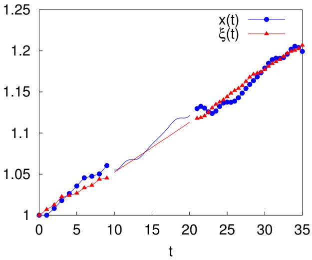


c) Абсолютная погрешность усреднения

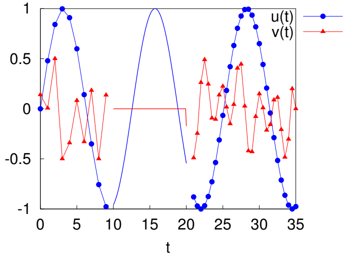


d) Зависимость погрешности алгоритма усреднения от ε.

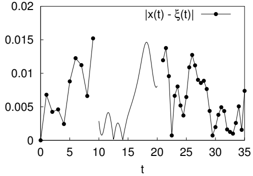
$$\mathbb{T} = \mathbb{Z},\ \varepsilon = 0.01 \text{ и } u(t) = \sin(t/2).$$



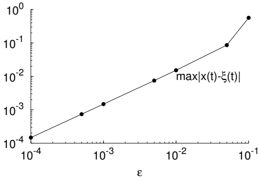
a) Траектории движения исходной и усредненной систем



b) Управление исходной и усредненной систем



c) Абсолютная погрешность усреднения



d) Зависимость погрешности алгоритма усреднения от ε.

$\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2 \cup \mathbb{T}_3$, где $\mathbb{T}_1 = [0, 9], \mu_1(t) \equiv 1$,
$\mathbb{T}_2 = [10, 20], \mu_2(t) \equiv 0$, $\mathbb{T}_3 = [21, 35], \mu_3(t) \equiv 0.5$.

Постановка задачи

Рассмотрим терминальную задачу оптимального управления на временной шкале:

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = \varepsilon\left[f(t, x(t)) + A(x(t))\varphi(t, u(t))\right] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{9}$$

$$\min J[u] = \Phi\left(x(t_1)\right). \tag{10}$$

Здесь $\mathbb{T}$ — временная шкала — непустое замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, $\sup\mathbb{T} = +\infty$, $t \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}^n$, x^{Δ} — Δ-производная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f(t, x)$ — n-мерная вектор-функция, $A(x)$ — $n \times m$ матрица, $\varphi(t, u)$ — m-мерная вектор-функция, $u(t) \in U$ — вектор управления, $U \in comp\,(R^r)$, $t_0 \geqslant \inf\mathbb{T}$, $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Поставим (9)–(10) в соответствие следующую задачу:

$$\begin{cases} \xi^{\Delta} = \varepsilon \left[\bar{f}(\xi) + A(\xi)\, v \right] \\ \xi(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\min \bar{J}[v] = \Phi\left(\xi(t_1)\right), \tag{12}$$

где, как и ранее,

$$\bar{f}(\xi) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} f(t, \xi) \Delta t,$$

$$v \in V, \quad V = \lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} \varphi(t, U) \Delta t.$$

Теорема

Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset comp(\mathbb{R}^r)\}$ выполнены условия предыдущей теоремы и, кроме того

1) $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицева с константой Липшица λ_Φ;
2) существует оптимальное управление $u^*(t) \in U$ задачи (9),(10) и оптимальное управление $v^*(t) \in V$ задачи (11),(12).

Тогда для любых $0 < \eta \leqslant \rho$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливы следующие неравенства:

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| \leqslant \eta,$$
$$J\left[u_{v^*}\right] - J[u^*] \leqslant \eta,$$

где u_{v^*} — управление системы (9), построенное по описанному алгоритму и соответствующее оптимальному управлению v^* задачи (11),(12).

Численно-асимптотический метод решения задачи оптимального управления (9),(10):

1. Для управляемой системы (9) строим усредненную систему (11).
2. Для усредненной управляемой системы строим множество допустимых управлений V по формуле (7) .
3. Записываем и решаем усредненную задачу оптимального управления (11),(12), находим оптимальное управление усредненной системой v^*.
4. По найденному управлению усредненной системы v^* по алгоритму соответствия управлений восстанавливаем асимптотически оптимальное управление исходной системы u_{v^*}.
5. Строим траекторию исходной системы (9), порождаемую управлением u_{v^*}.
6. Находим значение функционала качества (10) на асимптотически оптимальном управлении u_{v^*}, которое, в соответствии с последней теоремой отличается от оптимального значения на малую величину η.

Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов.
Введение в нелинейную механику – Киев : Изд-во АН СССР, 1937. — 363 с.

Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.
Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний – М. : Наука, 1974. — 503 с.

Hilger S.
Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph.D. thesis, Universität Würzburg, 1988.

M. Bohner, A. Peterson
Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications – Birkhäuser Basel, 2001. — 358 p.

M. Bohner, A. Peterson et al.
Advances in Dynamic Equations on Time Scales – Springer, 2002. — 368 p.

М. Бохнер , А. А. Мартынюк
Элементы теории устойчивости А.М.Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале // Прикл. механика. – 2007. – Т.43, №.2. – с. 3-26.

Martynyuk-Chernienko Yu. A.
On the stability of dynamical systems on a time scale // Dokl.Acad.Nauk. – 2007. – 413. – p. 1-5. [Russian].

Jaqueline Godoy Mesquit, Antonín Slavík
Periodic averaging theorems for various types of equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2012. - Vol. 387, No. 2. - p. 862-877.

Antonín Slavík
Averaging dynamic equations on time scales // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2012. - Vol. 388, No. 2. - p. 996-1012.

Огуленко А. П., Кичмаренко О. Д. Схема полного усреднения на временных шкалах // Вестник Одесск. нац. ун-та. Матем. и мех. — 2012. — Т.17, вып. 4 (16). — С. 67–77.

Огуленко А. П., Кичмаренко О. Д. Усреднение управляемых систем на временных шкалах // Dynamical system modelling and stability investigation: XVI International Conference: Modelling and stability: Abstracts of conf. reports, May 29-31, 2013, Kiev, Ukraine. — Kiev, 2013. — P. 377.

Огуленко А. П., Кичмаренко О. Д. Усреднение задачи оптимального управления на временных шкалах // Нелинейные колебания. — 2014. — Т.17, № 3. – С. 365–378.