# Импульсные дифференциальные включения с нечеткой правой частью

Пусть $conv(\mathbb{R}^n)-$ метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа

$$h(F,G) = \inf\{r \geq 0 : F \subset G + S_r(0), G \subset F + S_r(0)\},$$

где $S_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq r\}$, $||\cdot||-$ евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Полуотклонение множества $F$ от множества $G$ :

$$\varrho(F,G) = \inf\{r \geq 0 : F \subset G + S_r(0)\}.$$

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $x : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $x-$ нормально, т.е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

2) $x-$ нечетко выпукло, т.е. для любых $y, z \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$x(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \min\{x(y), x(z)\};$$

3) $x-$ полунепрерывно сверху по Бэру, т.е. для любого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $||y - y_0|| < \delta$, справедливо неравенство $x(y) < x(y_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение

$$\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, \ y = 0, \\ 0, \ y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$$

**Определение 1.** $\alpha$ – срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$ назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathbb{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$.

**Теорема 1.** *Если* $x \in \mathbb{E}^n$, *то*

*1)* $[x]^\alpha \in conv(\mathbb{R}^n)$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$;

*2)* $[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ *для всех* $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;

*3) если* $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ *– неубывающая последовательность, сходящаяся к* $\alpha > 0$, *то* $[x]^\alpha = \bigcap\limits_{k \geq 1} [x]^{\alpha_k}$.

*Наоборот, если* $\{A^\alpha : \alpha \in [0,1]\}$*– семейство подмножеств* $\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих условиям 1) - 3), то существует* $x \in \mathbb{E}^n$ *такое, что* $[x]^\alpha = A^\alpha$ *для* $\alpha \in (0,1]$ *и* $[x]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha\leq 1} A^\alpha} \subset A^0$.

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to [0,+\infty)$, полагая

$$D(x,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h([x]^\alpha, [v]^\alpha).$$

В 1990 году J.P. Aubin и V.A. Baidosov ввели в рассмотрение дифференциальные включения с нечеткою правою частью. Их подход к решению таких уравнений основан на сведении последних к обычным дифференциальным включениям.

Рассмотрим дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in I \subset \mathbb{R}-$ время, $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n-$ нечеткое отображение.

**Определение 2**. $\alpha-$ решением включения (1) назовем абсолютно непрерывную функцию $x : I \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую включению

$$\dot{x}(t) \in [F(t, x(t))]^\alpha,\ x(t_0) = x_0$$

почти всюду на $I$.

Множество всех $\alpha-$ решений включения (1) в момент времени $t$ обозначим $X_\alpha(t)$. В случае, если семейство $\{X_\alpha(t),\ \alpha \in [0,1]\}$ удовлетворяет условиям Теоремы 1, оно определяет нечеткое множество $X(t)$, которое называется множеством решений включения (1) в момент времени $t$.

Вопросы существования множества $X(t)$, его свойства рассматривались в работах E. Hullermeier, V. Lakshmikantham, S. Leela, R.N. Mohapatra, A.A. Tolstonogov и др. В работах А.В.Плотникова доказана возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр.

Многие процессы в биологии, теории управления, электронике описываются при помощи импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью [Mengshu Guo, Xiaoping Xue, Ronglu Li].

Пусть $I-$ промежуток в $\mathbb{R}$.

**Определение 3**. Отображение $F : I \to \mathbb{E}^n$ называется непрерывным на $I$, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $[F(t)]^\alpha$ непрерывно.

**Определение 4**. Интегралом от отображения $F : I \to \mathbb{E}^n$ по множеству $I$ называется элемент $G \in \mathbb{E}^n$ такой, что $[G]^\alpha = \int\limits_I [F(t)]^\alpha dt$ для всех $\alpha \in (0,1]$, где интеграл от многозначного отображения $[F(t)]^\alpha$ понимается в смысле Ауманна.

**Теорема 2**. *Если отображение $F : I \to \mathbb{E}^n$ непрерывно, то оно интегрируемо на $I$.*

**Определение 5**. Говорят, что отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ удовлетворяет условию Липшица по $x$, если существует постоянная $\lambda \geq 0$ такая, что

$$h([F(t,x)]^\alpha, [F(t,\bar{x})]^\alpha)) \leq \lambda ||x - \bar{x}||$$

для всех $\alpha \in [0,1]$.

**Определение 6**. Говорят, что отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ вогнутозначно по $x$, если

$$\beta[F(t,x)]^\alpha + (1-\beta)[F(t,y)]^\alpha \subset [F(t, \beta x + (1-\beta)y)]^\alpha$$

для любых $\beta \in [0,1]$ и $\alpha \in [0,1]$.

Рассмотрим импульсное дифференциальное включения с нечеткой правой частью

$$x' \in \varepsilon F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x),$$

где $t \in \mathbb{R}_+ -$ время, $x \in G \subset \mathbb{R}^n -$ фазовый вектор, $F : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{E}^n$, $I_i : G \to \mathbb{E}^n -$ нечеткие отображения, моменты импульсов $\tau_i$ занумерованы в возрастающем порядке.

Если для любых $t \geq 0, x \in G$ существует предел

$$\bar{F}(x) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x)\right), \tag{3}$$

то в соответствие включению (2) поставим следующее усредненное дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$y' \in \varepsilon \bar{F}(y),\ y(0) = x_0. \tag{4}$$

**Теорема 3**. *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, *где* $G$ *выпукло, выполняются следующие условия:*

*1) нечеткие отображения* $F : Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i : G \to \mathbb{E}^n$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* $M$, *удовлетворяют условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$ *и вогнутозначны по* $x$;

*2) равномерно относительно* $t \geq 0$ *и* $x \in G$ *существует предел (3) и*

$$\frac{1}{T}\, i(t, t+T) \leq \nu, \nu < \infty,$$

*где* $i(t, t+T)-$ *количество точек последовательности* $\tau_i$ *на промежутке* $(t, t+T]$;

*3) для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \geq 0$ $\alpha-$ *решения включения (4) вместе с* $\rho-$ *окрестностью принадлежат области* $G$ *для всех* $\alpha \in [0, 1]$.

*Тогда для любых* $\eta \in (0, \rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$D(X(t), Y(t)) < \eta, \tag{5}$$

*где* $X(t)-$ *множество решений включения (2),* $Y(t)-$ *множество решений включения (4).*

Если нечеткие отображения $F(t,x)$ и $I_i(x)$ $2\pi-$ периодичны по $t$, можно получить более точную оценку. В этом случае

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(s,x)ds + \frac{1}{2\pi}\sum_{0\le\tau_i<2\pi} I_i(x). \qquad (6)$$

**Теорема 4**. *Пусть в области* $Q = \{t \ge 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, *где* $G$ *выпукло, выполняются следующие условия:*

*1) нечеткие отображения* $F : Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i : G \to \mathbb{E}^n$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* $M$, *удовлетворяют условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$ *и вогнутозначны по* $x$;

*2) нечеткое отображение* $F(t,x)$ $2\pi-$ *периодично по* $t$ *и существует такое* $\nu \in \mathbb{N}$, *что для всех* $i \in \mathbb{N}$ *выполняются равенства* $\tau_{i+\nu} = \tau_i + 2\pi,\ I_{i+\nu}(x) \equiv I_i(x)$;

*3) для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \ge 0$ $\alpha-$ *решения включения (4) вместе с* $\rho-$ *окрестностью принадлежат области* $G$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$.

*Тогда для любого* $L > 0$ *существуют* $\varepsilon^0(L) > 0$ *и* $C(L) > 0$ *такие, что для всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$D(X(t), Y(t)) \le C\varepsilon, \qquad (7)$$

*где* $X(t)-$ *множество решений включения (2),* $Y(t)-$ *множество решений включения (4).*

**Замечание.** Требование вогнутозначности правых частей исходного включения является достаточно сильным и необходимо для обеспечения выпуклости множеств $\alpha-$ решений исходного и усредненного включений для любого $\alpha \in [0,1]$. Если решение рассматривать в пространстве $\Sigma^n$ отображений $x:\mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих условиям 1),3) и 4) из определения пространства $\mathbb{E}^n$, то требование вогнутозначности можно отбросить, при этом утверждения теорем останутся в силе.

Рассмотрим импульсное дифференциальное включения с нечеткой правой частью

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0, \tag{8}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x),$$

где $t \in \mathbb{R}_+ -$ время, $x \in G \subset \mathbb{R}^n -$ фазовый вектор, $F : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{E}^n$, $I_i : G \to \mathbb{E}^n -$ нечеткие отображения, моменты импульсов $\tau_i$ занумерованы в возрастающем порядке.

В соответствие включению (8) поставим следующее частично усредненное дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$\dot{y} \in \varepsilon \bar{F}(t,y),\ t \neq \sigma_s,\ y(0) = x_0, \tag{9}$$

$$\Delta y|_{t=\sigma_s} \in \varepsilon \bar{I}_s(y),$$

где нечеткие отображения $\bar{F} : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{E}^n$, $\bar{I}_s : G \to \mathbb{E}^n$ и моменты импульсов $\sigma_s$ таковы, что для любых $t \geq 0, x \in G$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \left( \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x), \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \bar{F}(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\sigma_s<t+T} \bar{I}_s(x) \right) = 0. \tag{10}$$

**Теорема 5**. *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0, \ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, *где* $G$ *выпукло, выполняются следующие условия:*

*1) нечеткие отображения* $F, \bar{F} : Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i, \bar{I}_s : G \to \mathbb{E}^n$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* $M$, *удовлетворяют условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$ *и вогнутозначны по* $x$;

*2) равномерно относительно* $t \geq 0$ *и* $x \in G$ *существует предел (18) и*

$$\frac{1}{T}\, i(t, t+T) \leq \nu, \frac{1}{T}\, s(t, t+T) \leq \nu, \nu < \infty,$$

*где* $i(t, t+T), s(t, t+T)-$ *количество точек последовательностей* $\tau_i, \sigma_s$ *на промежутке* $(t, t+T]$;

*3) для любых* $x_0 \in G' \subset G$, $t \geq 0$ *и* $\varepsilon \in (0, \sigma]$ $\alpha-$ *решения включения (9) вместе с* $\rho-$ *окрестностью принадлежат области* $G$ *для всех* $\alpha \in [0, 1]$.

*Тогда для любых* $\eta \in (0, \rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L) \in (0, \sigma]$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$D(X(t), Y(t)) < \eta, \tag{11}$$

*где* $X(t)-$ *множество решений включения (8),* $Y(t)-$ *множество решений включения (9).*

Если нечеткие отображения $F(t,x), \bar{F}(t,x)$ и $I_i(x), \bar{I}_s(x)$ периодичны по $t$, можно получить более точную оценку.

**Теорема 6**. *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, *где* $G$ *выпукло, выполняются следующие условия:*

*1) нечеткие многозначные отображения* $F, \bar{F} : Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i, \bar{I}_s : G \to \mathbb{E}^n$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* $M$ *и удовлетворяют условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$;

*2) нечеткие многозначные отображения* $F(t,x), \bar{F}(t,x)$ $2\pi-$ *периодичны по* $t$ *и существуют такие* $\nu, \bar{\nu} \in \mathbb{N}$, *что для всех* $i \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства* $\tau_{i+\nu} = \tau_i + 2\pi,\ \sigma_{s+\bar{\nu}} = \sigma_s + 2\pi,\ I_{i+\nu}(x) \equiv I_i(x),\ \bar{I}_{s+\bar{\nu}}(x) \equiv \bar{I}_s(x)$;

*3) для любых* $x_0 \in G' \subset G,\ t \geq 0$ *и* $\varepsilon \in (0, \sigma]$ $\alpha-$ *решения включения (9) вместе с некоторой* $\rho-$ *окрестностью принадлежат области* $G$.

*Тогда для любого* $L > 0$ *существуют* $\varepsilon^0(L) \in (0, \sigma]$ *и* $C(L) > 0$ *такие, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$D(X(t), Y(t)) \leq C\varepsilon, \tag{12}$$

*где* $X(t)-$ *множество решений включения (8),* $Y(t)-$ *множество решений включения (9).*

Рассмотрим импульсное дифференциальное включения с нечеткой правой частью

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0, \tag{13}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x),$$

где $t \in \mathbb{R}_+ -$ время, $x \in G \subset \mathbb{R}^n -$ фазовый вектор, $F : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{E}^n$, $I_i : G \to \mathbb{E}^n -$ нечеткие отображения, моменты импульсов $\tau_i$ занумерованы в возрастающем порядке.

Наряду с включением (17) рассмотрим следующее частично усредненное дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$\dot{y} \in \varepsilon \bar{F}(t,y),\ y(0) = x_0, \tag{14}$$

где нечеткое отображение

$$\bar{F}(t,x) = \frac{1}{\omega}\int_{j\omega}^{(j+1)\omega} F(t,x)dt + \frac{1}{\omega}\sum_{j\omega \leq \tau_i < (j+1)\omega} I_i(x), \tag{15}$$

$$t \in (j\omega, (j+1)\omega],\ j = 0, 1, ...,$$

$\omega > 0$ - шаг.

**Теорема 7**. *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, *где* $G$ *выпукло, выполняются следующие условия:*

*1) нечеткие отображения* $F : Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i : G \to \mathbb{E}^n$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* $M$, *удовлетворяют условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$ *и вогнутозначны по* $x$;

*2) количество моментов времени* $\tau_i$ *на промежутке* $(t, t+\tau]$ *не превосходит* $\nu\tau$, *где* $\nu < \infty$;

*3) для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \geq 0$ $\alpha-$ *решения включения (14) вместе с* $\rho-$ *окрестностью принадлежат области* $G$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$.

*Тогда для любого* $L > 0$ *существуют* $\varepsilon^0(L) > 0$ *и* $C(L)$ *такие, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедлива оценка:*

$$D(X(t), Y(t)) < C\varepsilon, \tag{16}$$

*где* $X(t)-$ *множество решений включения (17),* $Y(t)-$ *множество решений включения (14).*

Рассмотрим импульсное дифференциальное включения с нечеткой правой частью

$$x' \in \varepsilon F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0, \tag{17}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x).$$

Предположим, что предел

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(x)\right) \tag{18}$$

не существует, но существуют нечеткие отображения $F^-$, $F^+ : G \to \mathbb{E}^n$ такие, что

$$\lim_{T\to\infty}\beta\left(F^-(x), \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(x)\right) = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{T\to\infty}\beta\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(x), F^+(x)\right) = 0, \tag{20}$$

где $\beta(F,G) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \varrho([F]^\alpha, [G]^\alpha)$.

Наряду с включением (17) рассмотрим следующие дифференциальные включения с нечеткой правой частью

$$x^{-\prime} \in \varepsilon F^{-}(x^{-}), \;\; x^{-}(0) = x_0, \tag{21}$$

$$x^{+\prime} \in \varepsilon F^{+}(x^{+}), \;\; x^{+}(0) = x_0. \tag{22}$$

**Теорема 8**. *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, *где* $G$ *выпукло, выполняются следующие условия:*

*1) нечеткие отображения* $F : Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i : G \to \mathbb{E}^n$ *равномерно ограничены постоянной* $M$, *удовлетворяют условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$ *и вогнутозначны по* $x$;

*2) нечеткое отображение* $F^- : G \to \mathbb{E}^n$ *равномерно ограничено постоянной* $M$, *удовлетворяет условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$ *и вогнутозначно по* $x$;

*3) равномерно относительно* $t \geq 0$ *и* $x \in G$ *существует предел (19) и*

$$\frac{1}{T}\, i(t, t+T) \leq \nu,\ \nu < \infty,$$

*где* $i(t, t+T)-$ *количество точек последовательности* $\tau_i$ *на промежутке* $(t, t+T]$;

*4) для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \geq 0$ $\alpha-$ *решения включения (21) вместе с* $\rho-$ *окрестностью принадлежат области* $G$ *для всех* $\alpha \in [0, 1]$.

*Тогда для любых* $\eta \in (0, \rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство:*

$$\beta(Y^-(t), X(t)) < \eta, \tag{23}$$

*где* $X(t)-$ *множество решений включения (17),* $Y^-(t)-$ *множество решений включения (21).*

**Теорема 9**. *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, *где* $G$ *выпукло, выполняются следующие условия:*

*1) нечеткие отображения* $F : Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i : G \to \mathbb{E}^n$ *равномерно ограничены постоянной* $M$, *удовлетворяют условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$ *и вогнутозначны по* $x$;

*2) нечеткое отображение* $F^+ : G \to \mathbb{E}^n$ *равномерно ограничено постоянной* $M$, *удовлетворяет условию Липшица по* $x$ *с постоянной* $\lambda$ *и вогнутозначно по* $x$;

*3) равномерно относительно* $t \geq 0$ *и* $x \in G$ *существует предел (19) и*

$$\frac{1}{T}\, i(t, t+T) \leq \nu,\ \nu < \infty,$$

*где* $i(t, t+T)-$ *количество точек последовательности* $\tau_i$ *на промежутке* $(t, t+T]$;

*4) для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \geq 0$ $\alpha-$ *решения включения (22) вместе с* $\rho-$ *окрестностью принадлежат области* $G$ *для всех* $\alpha \in [0, 1]$.

*Тогда для любых* $\eta \in (0, \rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство:*

$$\beta(X(t), Y^+(t)) < \eta, \tag{24}$$

*где* $X(t)-$ *множество решений включения (17),* $Y^+(t)-$ *множество решений включения (22).*

**Пример**.

Рассмотрим линейное нечеткое дифференциальное включение в ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{R}^2$

$$\dot{x} \in \varepsilon \left[ \begin{pmatrix} 2\cos^2 t & 0 \\ 0 & 2\sin^2 t \end{pmatrix} x + f(t) \right], \quad x(0) = 0, \ t \neq 2\pi k, \tag{25}$$

$$\Delta x|_{t=2\pi k} = (-1)^k \varepsilon x,$$

где $[f(t)]^\alpha = (1-\alpha)S_{r(t)}(0), \ \alpha \in [0,1], \ r(t) = 2 + e^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\ln(t+1))$.

Очевидно, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} \begin{pmatrix} 2\cos^2 s & 0 \\ 0 & 2\sin^2 s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t \le \tau_i < t+T} I_i(x) = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} [f(s)]^\alpha ds = \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} (1-\alpha) S_{r(s)}(0) ds =$$

$$= \frac{1}{4T}(1-\alpha)S_1(0) \left[ 4(2s - e^{-s}) + (s+1)\sqrt{2}(\sin(\ln(s+1)) - \cos(\ln(s+1))) \right] \Bigg|_t^{t+T},$$

поэтому предел (20) не существует. Таким образом, мы не можем применить схему полного усреднения.

Очевидно, что найдутся $f^-$ и $f^+$ такие, что

$$[f^-]^\alpha = (1-\alpha)S_1(0),\ [f^+]^\alpha = (1-\alpha)S_3(0),\ \alpha \in [0,1],$$
$$\lim_{T\to\infty} \beta \left( f^-, \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} f(s)ds \right) = 0, \qquad \lim_{T\to\infty} \beta \left( \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} f(s)ds, f^+ \right) = 0.$$

Тогда включения (21) и (22) могут быть записаны в форме:

$$x^{-\prime} \in \varepsilon \left[ x^- + f^- \right], x^-(0) = 0, \tag{26}$$

$$x^{+\prime} \in \varepsilon \left[ x^+ + f^+ \right], \ x^+(0) = 0. \tag{27}$$

Множество решений включения (26)[(27)] $Y^\pm(t)$ таково, что

$$[Y^\pm(t)]^\alpha = (1-\alpha)S_{\rho^\pm(t)}(0),$$

$\rho^\pm(t)$– решение дифференциального уравнения

$$\dot\rho^-(t) = \varepsilon \left[ \rho^-(t) + 1 \right], \ \rho^-(0) = 0$$

$$\left[ \dot\rho^+(t) = \varepsilon \left[ \rho^+(t) + 3 \right], \ \rho^+(0) = 0 \right],$$

т.е.

$$\rho^{-}(t) = -1 + e^{\varepsilon t}, \rho^{+}(t) = -3 + 3e^{\varepsilon t}.$$

Применяя теоремы 8 и 9 имеем

$$\beta(X(t), Y^{+}(t)) < \eta,\ \ \beta(Y^{-}(t), X(t)) < \eta,$$

где $X(t)$– множество решений включения (25).

В данном направлении опубликованы

1. Скрипник Н.В. Усреднение испульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью // УМЖ. - 2014. - Т.66, №11. - С. 1563 - 1577.

2. Skripnik N. Step scheme of averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side // Contemporary Methods in Mathematical Physics and Gravitation. - Vol.1, №1. - 2015. - P. 9-26.

Принята к печати

Скрипник Н.В. Схема частичного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью // Матстудии

Отправлена в печать

Skripnik N. Averaging of impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average is absent // EAJM