Самостоятельная работа №1
Преследование на плоскости

Список группы с указанными вариантами и текущие оценки можно узнать на сайте кафедры ОУЭК (ссылку на веб-страницу курса «Дифференциальные игры» можно найти в разделе «Обучение», подраздел «Специальные курсы»).

Работа состоит из трех заданий и засчитывается, если набрана как минимум половина баллов. Возможна одна пересдача на повышение балла (при этом задание заменяется на новое).

Задание 1. (8 баллов). В $\mathbb{R}^2$ рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Закон движения P имеет вид

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u \in U = \{(u_1, u_2) : \|u\| \leqslant \alpha\}.$$

Движение E описывается уравнением вида

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad v \in V = \{(v_1, v_2) : \|v\| \leqslant \beta\}.$$

Игрок E выбирает программное управление $v(t)$ вида

$$v(t) = \begin{cases} v_0, & \text{если } t \in [0, \tau_1], \\ v_1, & \text{если } t \in (\tau_1, \tau_2], \\ v_2, & \text{если } t \in (\tau_2, \infty), \end{cases}$$

и в момент $t = 0$ сообщает P о выборе v_0, в момент τ_1 — о выборе v_1, в момент τ_2 — о выборе v_2 (если к соответствующему моменту τ_j встреча еще не произошла). Игрок P использует стратегию параллельного сближения, двигаясь с максимальной по норме скоростью.

Необходимо найти траекторию P и наименьший момент встречи (момент встречи — момент T такой, что $x(T) = y(T)$. Траектории движения игроков изобразить на графике, снабдив их временными отметками (из графика должно быть понятно, в какой примерно момент времени игрок находится в той или иной точке траектории). Изобразить на графике окружности Аполлония, соответствующие моментам времени $0, \tau_1, \tau_2$. Параметры задачи для кажого варианта указаны в таблице ниже.

№ варианта	α	β	v_0	τ_1	v_1	τ_2	v_2	y_0
1	4	2	(-2, 0)	1	(0, 2)	2	(1, 1)	(0, 10)
2	5	2	(-2, 0)	2	(1, 1)	4	(0, 2)	(0, -10)
3	6	2	(0, 2)	2	(-1, 1)	4	(0, -2)	(11, 12)
4	4	3	(0, 2)	2	(-1, -1)	4	(0, -2)	(11, -12)
5	5	3	(0, 2)	2	(1, -1)	4	(0, 0)	(11, 12)
6	6	3	(1, 1)	2	(-2, 0)	4	(2, 0)	(12, 13)
7	7	2	(-1, -1)	2	(2, 0)	4	(-2, 0)	(12, 13)
8	7	3	(-1, 1)	2	(-2, 0)	4	(1, -1)	(12, 13)
9	7	4	(1, -1)	2	(0, 2)	4	(1, -1)	(12, 13)
10	7	5	(-2, 0)	2	(0, 2)	5	(1, 1)	(-12, -13)

Вариант 1.

Задание 2.(6 баллов)

Рассмотреть игру $\Gamma(1,1;S)$, где $\rho = 2$, $\sigma = 1$, $S = \{(x,y) : y = 0\}$.

1) Доказать, что оптимальное время преследования в игре относительно начальных положений $P(0) = (0,0)$, $E(0) = (1,0)$ равно $\theta = 1$. Оптимальная стратегия для P — перемещаться с вектор-скоростью $u = (2,0)$, оптимальная стратегрия для E — перемещаться с вектор-скоростью $v = (1,0)$.

2) Найти решение игры относительно начальных положений $P(0) = (a,0)$, $E(0) = (b,0)$, $a \neq b$.

Задание 3.(6 баллов)

Пусть M — точка на окружности Аполлония $C_R(O)$, соответствующей положениям $P(0)$ и $E(0)$, игроки P и E перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{P(0)M}$ и $\overrightarrow{E(0)M}$ соответственно, а $\alpha = \angle AE(0)M$, $\beta = \angle AP(0)M$, где где $A = A(P(0),E(0))$ — точка Аполлония. Доказать равенство

$$\sigma \sin \alpha = \rho \sin \beta.$$

Вариант 2.

Задание 2.(6 баллов)

Рассмотреть игру $\Gamma(1,1;S)$, где $\rho = 2$, $\sigma = 1$ и $S = \{(x,y) : -2 \leqslant x \leqslant 2, y = 0\}$ с линией жизни $L = \{(-2,0),(2,0)\}$, состоящей из двух точек.

1) Указать множество всех начальных положений $E(0)$, из которых в игре $\Gamma(1,1;S)$ возможно выживание при условии, что $P(0) = (0,0)$.

2) Рассмотреть игру $\Gamma(1,1;S)$ относительно начальных положений $P(0) = (a,0)$, $-2 \leqslant a \leqslant 2$, и $E(0) = (b,0)$, $-2 \leqslant b \leqslant 2$. Определить, при каких значениях параметров a, b возможно выживание.

Задание 3.(6 баллов)

Пусть $\rho = 1$, $\sigma = 1$, $P(0) = (0,0)$, $E(0) = (2,0)$. Рассмотрим квадрат K с вершинами в точках $(2,1)$, $(4,1)$, $(4,-1)$, $(2,-1)$. Предпишем игроку E движение вдоль границы квадрата K по часовой стрелке. Пусть P использует П-стратегию. Определить траекторию движения P до момента встречи с E и момент встречи.

Вариант 3.

Задание 2.(6 баллов)

Пусть S — некоторое выпуклое множество на плоскости и в процессе движения с постоянной линейной скоростью $\rho > 0$ точка P не может покинуть множество S. Доказать, что в этом случае множество достижимости игрока P из начального положения $P(0)$ к моменту времени t имеет вид

$$S \cap S_{\rho t}(P(0)).$$

Задание 3.(6 баллов)

Пусть $\rho > \sigma > 0$, E перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{E(0)M}$, а P использует П-стратегию, перемещаясь при этом по полупрямой $\overrightarrow{P(0)N}$. Доказать, что всегда

$$\angle E(0)P(0)N < 90°.$$

Вариант 4.

Задание 2.(6 баллов)

Пусть $S_{\rho t}(P(0))$ — множество достижимости игрока P к моменту времени t (лемма 1), точка $M \in C_{\rho t}(P(0))$ и игрок P, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по полупрямой $\overrightarrow{P(0)M}$. Рассмотрим множество достижимости $S_{\rho(t-t_1)}(P(t_1))$, где $0 < t_1 < t$, т. е. множество достижимости игрока P из начального положения $P(t_1)$ к моменту времени t (за время $t - t_1$). Доказать справедливость следующего соотношения:

$$M \in S_{\rho(t-t_1)}(P(t_1)) \subset S_{\rho t}(P(0)).$$

Задание 3.(6 баллов)

Пусть $\rho > \sigma > 0$ и игроки P и E в момент времени $t = 0$ находятся в положениях $P(0) = (0, 0)$ и $E(0) = (a, 0), a > 0$. Определить закон движения точки P в следующих двух случаях:

1) E движется по полупрямой $\overrightarrow{P(0)E(0)}$, а P использует П-стратегию;

2) E движется по полупрямой $\overrightarrow{E(0)P(0)}$, а P использует П-стратегию.

Вариант 5.

Задание 2.(6 баллов)

Пусть $C_R(O)$ и A — окружность и точка Аполлония, соответствующие начальным положениям $P(0)$ и $E(0)$. Доказать, что A — точка на окружности $C_R(O)$, наиболее удаленная от точки $P(0)$.

Задание 3.(6 баллов)

Пусть $\rho > \sigma > 0$, $C_R(O)$ и $A(P(0), E(0))$ — окружность и точка Аполлония, соответствующие положениям $P(0)$ и $E(0)$, M — точка на окружности Аполлония, отличная от $A(P(0), E(0))$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{P(0)M}$ и $\overrightarrow{E(0)M}$ соответственно. Найти геометрическое место точек Аполлония, соответствующих всем промежуточным положениям $P(t)$ и $E(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \|E(0) - M\|/\sigma$.

Вариант 6.

Задание 2.(6 баллов)

Пусть игрок P перемещается на плоскости с постоянной линейной скоростью $\rho > 0$, $t > 0$ и $z \in S_{\rho t}(P(0)) \setminus C_{\rho t}(P(0))$. Рассмотреть некоторую одновершинную ломаную $[P(0), A, z]$ такую, что игрок P, перемещаясь до момента времени $\|P(0) - A\|/\rho$ по полупрямой $\overrightarrow{P(0)A}$, а затем, перемещаясь по полупрямой $\overrightarrow{Az}$, в момент времени t оказывается в точке z. Пусть точка z зафиксирована. Рассмотрев множество всех таких одновершинных ломаных, найти геометрическое место точек A.

Задание 3.(6 баллов)

Рассмотреть игру $\Gamma(1, 1; S)$, где $\rho = 2$, $\sigma = 1$, $S = \{(x, y) : y = 0\}$.

1) Доказать, что оптимальное время преследования в игре относительно начальных положений $P(0) = (0, 0)$, $E(0) = (1, 0)$ равно $\theta = 1$. Оптимальная стратегия для P

— перемещаться с вектор-скоростью $u = (2, 0)$, оптимальная стратегрия для E — перемещаться с вектор-скоростью $v = (1, 0)$.

2) Найти решение игры относительно начальных положений $P(0) = (a, 0)$, $E(0) = (b, 0)$, $a \neq b$.

Вариант 7.

Задание 2.(6 баллов)

Пусть $\rho > \sigma > 0$, $C_R(O)$ и $A(P(0), E(0))$ — окружность и точка Аполлония, соответствующие положениям $P(0)$ и $E(0)$, M — точка на окружности Аполлония, отличная от $A(P(0), E(0))$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{P(0)M}$ и $\overrightarrow{E(0)M}$ соответственно. Найти геометрическое место точек Аполлония, соответствующих всем промежуточным положениям $P(t)$ и $E(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \|E(0) - M\|/\sigma$.

Задание 3.(6 баллов)

Пусть $\rho > \sigma > 0$, E перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{E(0)M}$, а P использует П-стратегию, перемещаясь при этом по полупрямой $\overrightarrow{P(0)N}$. Доказать, что всегда

$$\angle E(0)P(0)N < 90^\circ.$$

Вариант 8.

Задание 2.(6 баллов)

Пусть $\rho > \sigma > 0$, $C_R(O)$ и $A(P(0), E(0))$ — окружность и точка Аполлония, соответствующие положениям $P(0)$ и $E(0)$, M — точка на окружности Аполлония, отличная от $A(P(0), E(0))$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{P(0)M}$ и $\overrightarrow{E(0)M}$ соответственно. Далее, пусть $C_{R_1}(O_1)$ и A_1 — окружность и точка Аполлония, соответствующие некоторой паре промежуточных положений $P(t_1)$ и $E(t_1)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant \|E(0) - M\|/\sigma$. Доказать неравенство

$$\|E(0) - E(t_1)\| + \|E(t_1) - A_1\| \leqslant \|E(0) - A\|,$$

где A — точка Аполлония, соответствующая положениям $P(0)$ и $E(0)$.

Задание 3.(6 баллов)

Пусть $C_R(O)$ и A — окружность и точка Аполлония, соответствующие начальным положениям $P(0)$ и $E(0)$. Доказать, что A — точка на окружности $C_R(O)$, наиболее удаленная от точки $P(0)$.

Вариант 9.

Задание 2.(6 баллов)

Пусть $\rho > \sigma > 0$ и игроки P и E в момент времени $t = 0$ находятся в положениях $P(0) = (0, 0)$ и $E(0) = (a, 0), a > 0$. Определить закон движения точки P в следующих двух случаях:

1) E движется по полупрямой $\overrightarrow{P(0)E(0)}$, а P использует П-стратегию;

2) E движется по полупрямой $\overrightarrow{E(0)P(0)}$, а P использует П-стратегию.

Задание 3.(6 баллов)

Пусть $S_{\rho t}(P(0))$ — множество достижимости игрока P к моменту времени t, точка $M \in C_{\rho t}(P(0))$ и игрок P, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по полупрямой $\overrightarrow{P(0)M}$. Рассмотрим множество достижимости $S_{\rho(t-t_1)}(P(t_1))$, где $0 < t_1 < t$, т. е. множество достижимости игрока P из начального положения $P(t_1)$ к моменту времени t (за время $t - t_1$). Доказать справедливость следующего соотношения:

$$M \in S_{\rho(t-t_1)}(P(t_1)) \subset S_{\rho t}(P(0)).$$

Вариант 10.

Задание 2.(6 баллов)

Пусть $\rho > \sigma > 0$, E перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{E(0)M}$, а P использует П-стратегию, перемещаясь при этом по полупрямой $\overrightarrow{P(0)N}$. Доказать, что всегда

$$\angle E(0)P(0)N < 90^\circ.$$

Задание 3.(6 баллов)

Пусть S — некоторое выпуклое множество на плоскости и в процессе движения с постоянной линейной скоростью $\rho > 0$ точка P не может покинуть множество S. Доказать, что в этом случае множество достижимости игрока P из начального положения $P(0)$ к моменту времени t имеет вид

$$S \cap S_{\rho t}(P(0)).$$