Самостоятельная работа №3

Решение дифференциальной игры

Список группы с указанными вариантами и текущие оценки можно узнать на сайте кафедры ОУЭК (ссылку на веб-страницу курса «Дифференциальные игры» можно найти в разделе «Обучение», подраздел «Специальные курсы»).

Задание (15 баллов). Моделируется следующая экологическая проблема. Некоторое количество агентов (предприятий, сообществ) в процессе своей деятельности образуют токсичные отходы, загрязняющие общий водный ресурс, например, озеро. Обозначим через $x(t)$ уровень содержания токсичного вещества в озере в момент времени t. Каждый из n агентов может управлять уровнем своих выбросов $u_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Вместе с промышленными отходами, в озере происходит одновременно медленное естественное вторичное выделение токсического вещества, описываемое функцией $c(x)$, и понижение уровня вследствие испарения, вытока, консервации на дне и проч. неуправляемых процессов. Уравнение состояния озера имеет, таким образом, следующий вид:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) - \alpha x(t) + c(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Цель каждого из агентов состоит в оптимизации соотношения убытков от наносимого вреда и выгоды от производственной деятельности. Оценивая обе величины квадратичными функциями, получаем индивидуальные функции выигрыша следующего вида:

$$J_i[u_i] = \int\limits_0^T \left(\frac{1}{2}u_i^2(t) - \gamma x^2(t)\right) dt - \delta x^2(T) \to max, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Как видно, конфликтная ситуация рассматривается на заданном промежутке времени $[0, T]$ и в конце промежутка каждый агент штрафуется на величину, пропорциональную оставшемуся уровню загрязнения.

Необходимо составить основное уравнение дифференциальной игры (уравнение Беллмана) и с его помощью найти оптимальные стратегии управления выбросами и соответствующую им траекторию системы. Очень важным является тот факт, что игра **симметрична** и, фактически, оптимальная стратегия будет одинакова для всех игроков. Отметим основные моменты, которые помогут решить задачу.

Во-первых, функция Беллмана i-го игрока (функция цены игры) предполагается зависящей только от состояния системы (ищется стратегия с обратной связью), т. е. $V_i = V_i(x)$.

Во-вторых, поскольку критерий качества у каждого игрока свой, основное уравнение строится для каждого игрока в отдельности и максимум в каждом уравнении берется лишь по управляющей переменной этого игрока.

В-третьих, построив уравнения, вы покажите, что в силу симметрии они по существу одинаковы и поэтому $V_i(x) = V(x)$, $u_i^*(x) = u^*(x)$, $i = \overline{1,n}$. Найдя из условия максимума выражение для u^* через $\frac{\partial V}{\partial x}$ и подставив его в уравнение, вы обнаружите, что это квадратное уравнение относительно производной цены игры. Вспомнив формулу корней квадратного уравнения, вы сможете построить дифференциально уравнение для цены игры. Вместе с условием $V(x(T)) = -\delta x^2(T)$ оно образует задачу Коши для цены игры $V(x)$, которую надо решать задом наперед.

В-четвертых, подставив выраженное через цену игры управление u^* в уравнение системы, вы получите дифференциальное уравнение для нахождения $x(t)$ вместе с начальнім условием, т. е. задачу Коши. К сожалению, аналитически это уравнение решить невозможно, поэтому вы решите его **численнно**. Найдя таким образом траекторию уровня загрязнения озера, вы сможете найти и оптимальную стратегию u^* для каждого игрока.

В итоговом отчете вы должны представить все выкладки и итоговые графики x и u как функции времени.

№ варианта	T	$c(x)$
1	1	$0.05x$
2	2	$0.05x^2$
3	1	$0.1\log x$
4	2	$0.5e^{-x}$
5	1	$\dfrac{x^2}{1+x^2}$
6	2	$0.05x$
7	1	$0.05x^2$
8	2	$0.1\log x$
9	1	$0.5e^{-x}$
10	2	$\dfrac{x^2}{1+x^2}$

Во всех вариантах $x_0 = 1$, $n = 3$, $\alpha = \gamma = 15$, $\delta = 10$.