ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций (кривых) $y(x) = (y_1(x),...,y_n(x)),$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y_i(x), i = \overline{1,n}$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[x_0, x_1],$ где x_0 и x_1 заданы, т.е. $y_i(x) \in C^1[x_0, x_1], i = \overline{1,n}$;

б) функции $y_i(x), i = \overline{1,n}$ удовлетворяют граничным условиям

$$y_i(x_0) = y_{i0},\ \ y_i(x_1) = y_{i1}, i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где значения $y_{i0},\ y_{i1}, i = \overline{1,n}$ заданы, т.е. каждая из кривых $y_i(x), i = \overline{1,n}$ проходят через две закрепленные граничные точки.

На множестве M задан функционал

$$V[y_1(x),...,y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x),..., y_n(x), y_1'(x),..., y_n'(x))dx, \tag{2}$$

где подынтегральная функция $F(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор-функций $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор-функцию $y^*(x)$, на которой функционал (2) достигает экстремума.

Теорема (необходимое условие экстремума). *Если на вектор-функции* $y^*(x) = (y_1^*(x),..., y_n^*(x))$ *из класса* M *достигается экстремум функционала* (2)*, то функции* $y_i^*(x), i = \overline{1,n}$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$F_{y_i}(x, y_1(x),..., y_n(x), y_1'(x),..., y_n'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y_i'}(x, y_1(x),..., y_n(x), y_1'(x),..., y_n'(x)) = 0, i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Пример 1. Найти экстремали функционала

$$V[y(x), z(x)] = \int_1^2 \left(6y^2(x) + x^2 y'^2(x) + z'^2(x)\right)dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = 1, z(1) = 1, y(2) = 4, z(2) = 2.$

Так как

$$F = 6y^2 + x^2 y'^2 + z'^2,$$
$$F_y = 12y,\ F_{y'} = 2x^2 y',\ \frac{d}{dx} F_{y'} = 4xy' + 2x^2 y'',$$
$$F_z = 0,\ F_{z'} = 2z',\ \frac{d}{dx} F_{z'} = 2z'',$$

то система уравнений Эйлера имеет вид:

$$\begin{cases} 12y - 4xy' - 2x^2 y'' = 0, \\ -2z'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0, \\ z'' = 0. \end{cases}$$

Первое из уравнений системы является уравнением Эйлера. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 6 = 0$ или $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Корни данного уравнения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -3$. Общее решение имеет вид $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{-3}$.

Общее решение второго уравнения системы $z(x) = C_3 x + C_4$.

Определим постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 из граничных условий:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 1, \\ y(2) = 4C_1 + \dfrac{1}{8} C_2 = 4, \\ z(1) = C_3 + C_4 = 1, \\ z(2) = 2C_3 + C_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0, \\ C_3 = 1, \\ C_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, экстремаль имеет вид $y(x) = x^2, z(x) = x.$

Пример 2. Найти экстремали функционала

$$V[y(x), z(x)] = \int_1^2 \left(12y^2(x) + z^2 + x^2 y'^2(x) + z'^2(x)\right) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = 1, z(1) = e, y(2) = 8, z(2) = e^2$.

ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ОДНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $y(x)$,, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ определены и m раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[x_0, x_1]$, где x_0 и x_1 заданы, т.е. $y(x) \in C^m[x_0, x_1]$;

б) функции $y(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0,\ \ y(x_1) = y_1, \\ &y^{(i)}(x_0) = y_0^i,\ \ y^{(i)}(x_1) = y_1^i, i = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

где значения y_0, y_1, y_0^i, y_1^i $i = \overline{1, m-1}$ заданы.

На множестве M задан функционал

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(m)}(x))dx, \tag{5}$$

где подынтегральная функция $F(x, y, y', ..., y^{(m)})$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых функций $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти функцию $y_0(x)$, на которой функционал (5) достигает экстремума.

Теорема (необходимое условие экстремума). *Если на функции $y(x)$ из класса M достигается экстремум функционала (5), то функция $y(x)$ удовлетворяют уравнению Эйлера-Пуассона*

$$\begin{aligned} &F_y(x, y(x), y'(x), ..., y^{(m)}(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x), ..., y^{(m)}(x)) + ... + \\ &+(-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}}(x, y(x), y'(x), ..., y^{(m)}(x)) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Пример 1. Найти экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^1 \left(y'^2(x) + y''^2(x) \right) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) = e - 2,\ y'(1) = e - 1.$

Так как

$$F = y'^2 + y''^2,$$
$$F_y = 0, F_{y'} = 2y', \frac{d}{dx}F_{y'} = 2y'',$$
$$F_{y''} = 2y'', \frac{d}{dx}F_{y''} = 2y''', \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 2y'''',$$

то уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид:

$$-2y'' + 2y'''' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'''' - y'' = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$ и $\lambda_{3,4} = \pm 1.$ Общее решение имеет вид $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$

Определим постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 из граничных условий:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 + C_4 = 0, \\ y'(0) = C_2 + C_3 - C_4 = 0, \\ y(1) = C_1 + C_2 + C_3 e + C_4 e^{-1} = e - 2, \\ y'(1) = C_2 + C_3 e - C_4 e^{-1} = e - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = -1, \\ C_3 = 1, \\ C_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, экстремаль имеет вид $y(x) = e^x - x - 1.$

Пример 2. Найти экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2y(x)\sin x + y''^2(x)\right)dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$