1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Задача оптимального управления

Управляемый объект (управляемая система) - это некоторая машина, модель, прибор, процесс, конструкция и т.п., снабженная "рулями". Манипулируя "рулями" (в допустимых пределах, т.е. с учетом имеющихся ресурсов управления), мы тем самым определяем поведение, движение объекта, управляем им.

Слово "руль" взято в кавычки, поскольку под "рулем" понимается не обязательно устройство, соответствующее общепринятому значению этого слова, а любой фактор, дающий нам возможность влиять на движение объекта. Так у автомобиля два "руля": "баранка" и акселератор, а ресурсы управления характеризуются максимально возможным углом поворота колес и мощностью двигателя. Если в качестве управляемого объекта рассматривать технологический процесс протекания химической реакции, то роль "рулей" могут играть состав ингредиентов, количество катализатора, поддерживаемая температура и другие факторы, от которых зависит течение реакции.

Будем считать, что управляемый объект нам дан, так что известны и ресурсы управления, и закон движения, устанавливающий для выбранного правила манипулирования "рулями" эволюцию состояния объекта. Речь идет только об объектах, движение которых (при заданных начальных условиях) вполне точно и однозначно определяется выбором положения "рулей" в каждый момент времени. Такие объекты называют детерминированными. При их изучении никакие "случайности" во внимание не принимаются.

Следует учитывать, что часто наши возможности управлять объектом лимитируются не только ресурсами управления, но и тем, что в процессе движения объект не должен попадать в состояние, физически недоступное или недопустимое с точки зрения конкретных условий эксплуатации объекта. Например, при работе электрической системы нельзя допускать перегрева мотора; осуществляя маневр судна, необходимо учитывать ширину фарватера и т.д. Подчеркнем, что такого рода ограничения на состояние объекта совершенно не зависят от свойств самого объекта и являются дополнительными, диктуются условиями конкретной задачи.

Имея дело с управляемым объектом, мы всегда стремимся так манипулировать "рулями", чтобы, исходя из определенного начального состояния, достичь некоторого желаемого состояния, т.е. реализовать стоящую перед нами цель управления. Если, скажем, речь идет о запуске спутника, то нужно рассчитать режим работы двигателей ракеты-носителя, который обеспечит доставку спутника на желаемую орбиту. Как начальное состояние объекта, так и цель управления зависят от рассматриваемой прикладной задачи.

Как правило, существует бесконечное число способов управлять объектом так, чтобы добиться желаемого результата. В связи с этим и возникает задача не просто как-то реализовать цель управления, а найти тот способ управления, который в определенном смысле является наилучшим, оптимальным. Конечно, для этого мы должны располагать критерием качества, позволяющим судить о том, какой способ управления лучше, а какой хуже. Этот критерий также свой в каждой конкретной задаче. Так, при управлении электроприводом естественно стараться обеспечить отработку искомых величин за минимальное время, расчет графика полета самолета из одного пункта в другой преследует достижение наименьшей себестоимости и т.д.

Такова в общих чертах задача оптимального управления. Перейдем к ее математическому описанию.

1.2. Математическое описание задачи ОУ

1.2.1. ***Управляемый процесс.*** Будем рассматривать объект, состояние которого в фиксированный момент времени описывается набором из n чисел $x_1,\dots,x_n$ – фазовых координат (или фазовых переменных). Эти числа удобно считать компонентами фазового вектора (фазового состояния) $x=(x_1,\dots,x_n)^T$. Таким образом, состояние объекта в каждый момент времени можно изобразить точкой (элементом) n - мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, называемого фазовым пространством объекта. Например, в случае механического объекта с конечным числом степеней свободы фазовый вектор x составляют из обобщенных координат $q_1,\dots,q_k$ и обобщенных импульсов $p_1,\dots,p_k$.

Движение объекта проявляется в том, что фазовые координаты меняются с течением времени *t,* т.е. фазовый вектор является вектор-функцией независимой переменной *t*. При движении объекта фазовая (изображающая) точка $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))^T$ описывает в фазовом пространстве кривую - фазовую траекторию (фазовую кривую). Обычно фазовые координаты объекта являются "инерционными" переменными. Это значит, что они непрерывно зависят от времени.

Пусть, далее, в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задано некоторое множество *S*, представляющее собой совокупность всех фазовых состояний, в которых управляемому объекту разрешается находиться. Тогда при движении объекта его состояние $x(t)$ в каждый момент времени *t* должно подчиняться условию

$$x(t)\in S\subset\mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

которое называют ограничением на фазовые координаты (фазовым ограничением). В ряде задач интерес вызывает случай, когда множество *S* замкнуто, а фазовая траектория может проходить по его границе.

Предположим, что положение имеющихся у управляемого объекта "рулей" описывается в каждый момент времени набором из *r* чисел $u_1,...,u_m$ – управляющих параметров, составляющих вектор управления $u=(u_1,...,u_m)^T$. Положение "рулей" в каждый момент времени можно изобразить точкой m - мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^m$. Манипулирование "рулями" означает выбор вектор-функции $u(t)$, называемой управлением (управляющим воздействием).

Существенным моментом, характеризующим управляемую систему, является описание множества допустимых управлений, т.е. совокупности таких функций, которые исходя из реальных обстоятельств рассматриваемой задачи разрешается выбирать в качестве управлений и среди которых мы будем в дальнейшем искать, например, оптимальное управление. Это множество задают, как правило, с помощью "геометрических" условий, накладываемых на возможные значения функции $u(t)$ и требований к ее функциональным свойствам.

В любом реальном объекте "рули" не могут занимать совершенно произвольные положения либо из-за конструктивных особенностей объекта и ограниченности ресурсов, либо из-за условий эксплуатации объекта, опасности нарушения его нормальной работы. Это означает, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ управляющих параметров выделено некоторое множество U, называемое <u>областью управления</u>. В любой момент времени точка $u(t)$ должна принадлежать этому множеству. Иначе говоря, для любого момента времени t верно соотношение

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{1.2}$$

называемое <u>ограничением на управление</u>. Самым типичным является случай, когда область управления U - ограниченное замкнутое множество (последнее означает, что, грубо говоря, "рули" могут занимать и свои "крайние" положения).

Помимо ограничения на значение управляющего вектора в каждый момент времени необходимо также выяснить допустимый характер изменения этого вектора с течением времени. Обычно в качестве управлений рассматривают кусочно-непрерывные вектор-функции, т.е. вектор-функции, у которых каждая координатная функция $u_i(t)$ имеет на любом конечном интервале конечное число точек разрыва, причем все точки разрыва первого рода. Значение управления в точке разрыва не играет сколько-нибудь существенной роли в задачах управления. Но для определенности удобно считать, что оно совпадает с правосторонним пределом вектор-функции в точке разрыва:

$$u(\tau) = u(\tau + 0) = \lim_{t \to \tau + 0} u(t).$$

Также не ограничивая общности, можно считать, что управление $u(t)$ непрерывно на концах рассматриваемого отрезка $[t_0, t_1]$.

Если ограничение (1.2) на область значений управления выглядит достаточно естественно, то выбор в качестве управлений кусочно-непрерывных функций нуждается в пояснениях.

Наиболее реалистично выглядит требование, чтобы управление $u(t)$ было непрерывной функцией. Оно соответствует представлению о том, что управляющее воздействие, обладая определенной инерционностью, не может изменяться скачком. Но такое требование оказывается весьма неудобным. Как свидетельствуют даже простейшие примеры линейных задач, в классе непрерывных функций решение задачи оптимального управления может не существовать. Кроме того, более внимательный анализ реальных управляемых объектов показывает, что почти всегда в качестве управляющих можно выбрать такие параметры, которые в пределах разумной точности можно считать безинерционными. Поэтому класс кусочно-непрерывных функций оказывается выгодным с теоретической точки зрения и приемлемым с точки зрения практических приложений.

Кусочно-непрерывные управления со значениями, попадающими в область управления U, будем называть допустимыми. В дальнейшем, говоря об управлениях, будем иметь в виду допустимые управления, не оговаривая это каждый раз.

Чтобы указать, как именно фазовая траектория объекта определяется по выбранному управлению, нужно иметь закон движения объекта, описывающий динамические свойства рассматриваемой управляемой системы. Будем предполагать, что закон движения представляет собой соотношение

$$\dot{x} = f(t,x,u), \tag{1.3}$$

где $f(t,x,u) = (f_1(t,x,u),...,f_n(t,x,u))^T$ − известная вектор-функция, конкретный вид которой определяется конструктивными особенностями объекта или условиями рассматриваемой задачи. Далее будем полагать, что функции $f_i(t,x,u), i=\overline{1,n}$ удовлетворяют условиям теорем существования, единственности и продолжимости решений (например, непрерывны по всей совокупности переменных и непрерывно-дифференцируемы по совокупности переменных x).

Объект, математическая модель которого задается системой уравнений (1.1) - (1.3), является управляемым, что выражается в следующем. Если выбрано (допустимое) управление $u(t),\ t \in [t_0,t_1]$, то подстановка его в (1.3) приводит к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, записанной в векторной форме:

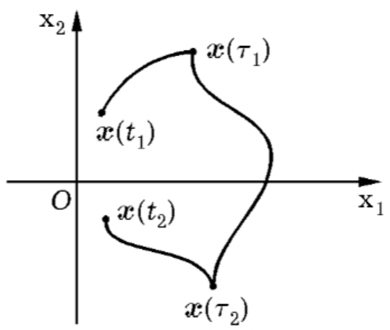
$$\dot{x} = f(t,x,u(t)). \tag{1.4}$$

При сделанных предположениях относительно вектор-функции f эта система при начальном условии $x(t_0) = x_0 = (x_1^0,...,x_n^0)^T$ имеет решение, и притом единственное, в окрестности точки t_0. Другими словами, при выбранном управляющем воздействии $u(t)$ на отрезке $[t_0,t_1]$ движение объекта описывается вектор-функцией, которая представляет собой решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4). Очевидно, что движение объекта будет меняться в зависимости от управляющего воздействия. Решение системы (1.4) при заданном управлении $u(t)$ как и определяемую этим решением кривую в фазовом пространстве, называют <u>фазовой траекторией, соответствующей этому управлению</u>. Начальное условие x_0 в задачах оптимального управления часто называют <u>начальным состоянием</u>.

Заметим, что именно к виду (1.3) обычно сводятся уравнения движения для механических управляемых объектов с конечным числом степеней свободы. Далее везде под управляемым объектом будем понимать систему обыкновенных дифференциальных вида (1.3).

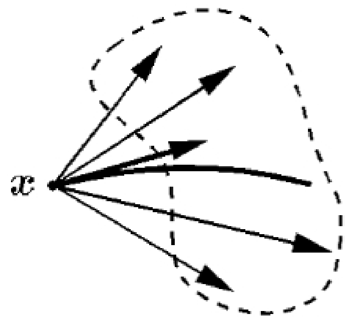
Детерминированность управляемого объекта означает, что выбор управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, должен однозначно определять (при заданном начальном условии) траекторию $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Чтобы это было так достаточно считать, что вектор-функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет ранее оговоренным условиям (например, непрерывна по совокупности переменных (t, x, u), непрерывно-дифференцируема по совокупности переменных x).

Тогда на каждом участке непрерывности управления $u(t)$ система (1.4) удовлетворяет теореме существования и единственности для задачи Коши. В точках разрыва какой-либо из координатных функций управления надо производить стыковку решений системы (1.4), обеспечивающую непрерывность фазовой траектории. На рисунке показан пример фазовой траектории на плоскости, которая отвечает управлению, имеющему разрывы первого рода в моменты времени τ_1 и τ_2. Таким образом, траектория $x(t)$ при кусочно-непрерывном управлении является непрерывной кривой, а ее



производная $\dot{x}(t)$ кусочно-непрерывна на рассматриваемом отрезке времени (такие кривые называют кусочно-гладкими). Если $u(t)$ – допустимое управление, а $x(t)$ – соответствующая фазовая траектория, удовлетворяющая ограничению (1.1), то пару функций $(x(t), u(t))$ будем называть допустимым процессом.

Полезно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию системы (1.3). Пусть в некоторый момент времени t управляемый объект находится в фазовом состоянии $x(t)$. Вектор $\dot{x}(t)$ представляет собой вектор фазовой скорости и является касательным вектором к кривой $x = x(t)$ в соответствующей точке. Если в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ построить при фиксированном x всевозможные векторы $f(t,x,u)$ для всевозможных допустимых управляющих воздействий u (момент времени t фиксирован), то получим, согласно (1.3), множество допустимых (возможных) фазовых скоростей в точке x (на рисунке пунктиром изображено множество концов всех таких векторов). Другими словами, выбор управляющего воздействия $u(t) \in U$ в момент времени t, когда изображающая точка находится в состоянии x, равнозначен выбору допустимой фазовой скорости, с которой изображающая точка выходит из этого состояния.



1.2.2. ***Цель управления.*** При рассмотрении реальных управляемых объектов, прежде всего, возникает задача управления движением. Для ее формулирования нужно задать в фазовом пространстве некоторое множество M (цель управления) тех состояний, которые являются желательными. При этом должно быть выполнено включение $M \subset S$.

Говорят, что управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ переводит объект (1.3) из состояния x_0 в состояние x_1, если соответствующая этому допустимому управлению фазовая траектория $x(t)$ (решение задачи Коши для системы (1.4) с начальным условием $x(t_0) = x_0$) определена на том же отрезке времени $[t_0, t_1]$, удовлетворяет ограничению (1.1) и в момент времени t_1 попадает в фазовое состояние x_1 (т.е. $x(t_1) = x_1$). Обратим внимание на то, что отрезок $[t_0, t_1]$ - это конечный промежуток числовой прямой. Если управление $u(t)$ переводит объект (1.3) из начального состояния x_0 в некоторое состояние

$x_1 \in M$, то будем говорить, что управление $u(t)$ реализует цель управления *M*.

Задача управления движением состоит в том, чтобы найти какое-нибудь допустимое управление, реализующее цель. Другими словами, для объекта (1.3) требуется отыскать такую кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ со значениями в *U,* определенную на отрезке $[t_0, t_1]$ (t_1, вообще говоря, заранее не известно), чтобы система (1.4) имела решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, ограничению (1.1) и конечному условию $x(t_1) \in M$. Следовательно, задача управления сводится к решению краевой задачи для системы *n*-го порядка (1.3) при ограничениях (1.1) и (1.2). Однако, общей теории решения подобных задач нет. Доказательство разрешимости задачи управления и фактическое отыскание управления, реализующего цель, наталкиваются на серьезные трудности.

Мы не будем рассматривать вопросы разрешимости задачи управления, предполагая, что цель управления, поставленная для изучаемого объекта, может быть реализована. Отметим, что во многих прикладных задачах разрешимость задачи управления вытекает "из физических соображений".

В задачах управления движением возникают различные по количеству и характеру краевые условия. Если множество *M*, характеризующее цель управления, совпадает со всем фазовым пространством $\mathbb{R}^n$, то такую задачу называют <u>задачей со свободным концом</u> траектории. В этом случае роль краевых играют начальные условия $x(t_0) = x_0$.

Более сложные задачи — так называемые <u>двухточечные задачи</u>, или <u>задачи с фиксированными (закрепленными) концами</u>. Эти задачи в качестве краевых условий имеют как $x(t_0) = x_0$, так и конечное $x(t_1) = x_1$. При этом <u>интервал времени управления</u> $t_1 - t_0$ может быть как заданным, так и подлежащим определению. В этом случае множество *M* цели управления состоит из единственной точки x_1.

В классе <u>многоточечных задач управления</u> для нескольких фиксированных моментов времени $t_0, t_1, ..., t_m$ заданы значения некоторых координат вектора состояния.

Наконец, в классе <u>задач с подвижными (скользящими) концами</u> требуется найти управление, переводящее объект из некоторого (заранее не известного) состояния x_0, принадлежащего известному множеству M_0, в некоторое состояние x_1 из известного множества M_1. Часто эти множества представляют собой гиперповерхности в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если M_0 и M_1 вырождаются в точки, то приходим к задаче с закрепленными концами.

1.2.3. ***Критерий качества.*** Предположим, что задача управления разрешима. Наиболее типичной является ситуация, когда задача управления имеет бесконечно много решений, т.е. существует бесконечно много управлений, реализующих цель, и все они с этой точки зрения совершенно равноправны. В таком случае может быть поставлена задача оптимального выбора: среди допустимых управлений выбрать такое, при котором управляемый процесс будет наилучшим в каком-то определенном смысле. Другими словами, если качество процесса оценивается некоторой числовой характеристикой, то задача заключается в том, чтобы выбором управления обеспечить ее максимальное или минимальное значение. Эту числовую характеристику называют критерием качества.

Значение критерия качества определяется управлением, динамикой управляемого процесса (временем управления, фазовой траекторией). Поэтому критерий качества представляет собой функционал того или иного вида, и задача оптимального управления состоит в отыскании управлений, обеспечивающих минимум или максимум этого функционала. Случай, когда требуется максимизировать функционал, сводится к задаче минимизации заменой исходного функционала *J* функционалом - *J*. Поэтому этот случай отдельно рассматривать не будем.

Таким образом, задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $u(t)$, реализующее цель, для которого функционал принимает наименьшее возможное значение. При этом управление $u(t)$ называют оптимальным управлением, соответствующую фазовую траекторию $x(t)$ - оптимальной траекторией, а процесс $(x(t), u(t))$ — оптимальным процессом.

Для управляемых процессов с законом движения (1.3) наиболее широко используют так называемые интегральные критерии качества - функционалы вида

$$J[u]=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),u(t))dt. \tag{1.5}$$

К этому классу критериев относятся:

а) критерий оптимального быстродействия с подынтегральной функцией $F(t,x,u)=1$, который сводится к представлению $J=t_1-t_0$. Такой критерий используется в теории автоматического управления (в следящих системах) для выбора параметров, обеспечивающих наименьший по длительности процесс при отработке входящего сигнала. Оптимальное управление в задачах с критерием оптимального быстродействия называют управлением, оптимальным по быстродействию.

б) интегральный квадратичный критерий с подынтегральной функцией $F(t,x,u)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, где среди коэффициентов a_i есть хотя бы один ненулевой. В представлении (1.5) могут рассматриваться как конечный ($t_1<+\infty$), так и бесконечный ($t_1=+\infty$) интервалы времени. Такой критерий дает косвенное представление о точности работы системы, рассматриваемой в фазовом пространстве. Его также используют в теории автоматического управления.

в) энергетические критерии качества с подынтегральными функциями

$$F(t,x,u)=\sum_{i=1}^{m}\delta_i u_i^2 \quad \text{и} \quad F(t,x,u)=\sum_{i=1}^{m}\delta_i\,|\,u_i\,|,$$

где $u=(u_{1,}...,u_m)^T$, а среди коэффициентов δ_i есть хотя бы один ненулевой. Эти критерии характеризуют затраты энергии, например, в задачах ориентации спутника с помощью газореактивных двигателей.

г) смешанный интегральный критерий с подынтегральной функцией $F(t,x,u)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2+\sum_{i=1}^{m}\delta_i u_i^2$, характеризующий отклонения по фазовым координатам "в среднем" и общие энергетические затраты.

Наряду с интегральными критериями качества в теории оптимального управления часто встречаются терминальные функционалы, т.е. функционалы вида $J[u]=\Phi(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1))$. К этому классу неинтегральных критериев относится, например, критерий конечного состояния $J[u]=\Phi(x(t_1))$. Его обычно используют в тех случаях, когда систему необходимо привести в заданное конечное состояние $a=(a_1,...,a_n)^T$ в момент времени t_1 с наименьшей ошибкой. В такой постановке критерий имеет вид

$$\Phi(x(t_1))=\sum_{i=1}^{n}(x_i(t_1)-a_i)^2=\| x(t_1)-a\|^2 .$$

Задача с интегральным критерием качества (задача Лагранжа) может быть сведена к задаче с терминальным критерием (задаче Майера) путем повышения размерности системы. Действительно, введем новую переменную x_{n+1}, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\dot{x}_{n+1}=F(t,x,u)$ и начальному условию $x_{n+1}(t_0)=0.$ Тогда критерий качества может быть записан в виде $J[u]=x_{n+1}(t_1).$

Если левый конец фазовой траектории фиксирован, то задача Майера может быть сведена к задаче Лагранжа с функционалом

$$\tilde{J}[u]=\Phi(t_1,x(t_1))-\Phi(t_0,x(t_0))=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\Phi(t,x(t))}{dt}dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\Phi(t,x(t))}{\partial x}f(t,x(t),u)+\frac{\partial\Phi(t,x(t))}{\partial t}\right]dt.$$

Рассматриваются также задачи оптимального управления со смешанным интегрально-терминальным критерием – задачи Больца:

$$J[u]=\Phi(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}F(t,x(t),u(t))dt.$$

2. Примеры задач оптимального управления

2.1. Задача о мягком прилунении космического корабля

Теория оптимального управления нашла широкое применение в ракетодинамике. Вывод космических аппаратов на орбиту, маневры в космосе, посадка требуют решения ряда оптимизационных задач, связанных с минимизацией расхода топлива, минимизацией времени выхода в заданную точку траектории и т.п. Именно процессы движения управляемых летательных аппаратов описываются достаточно простыми и, вместе с тем, точными математическими моделями. Наличие хорошо разработанной ранее теории движения ракет позволило быстро и эффективно применить методы оптимального управления к решению ряда проблем в этой актуальной области техники.

Предположим, что космический аппарат, который можно рассматривать как материальную точку, осуществляет мягкую посадку на Луну. Прилунение производится по вертикальной прямой, нормальной к поверхности Луны. Пусть начало координат совпадает с этой поверхностью, координатная ось направлена вертикально вверх. В начальный момент времени $t_0 = 0$ космический корабль, находящийся на известной высоте h, обладает скоростью ω_0 и имеет массу m_0. В каждый момент времени t на аппарат действует сила притяжения Луны, направленная вертикально вниз и равная по абсолютной величине $m(t)g_Л$. Здесь $m(t)-$ масса аппарата, $g_Л$ – ускорение свободного падения на Луне, которое мы будем считать постоянным. При включенных двигателях действует сила тяги, направленная вверх и равная $\beta u(t)$, где $u(t)-$ мгновенный расход топлива, $0 \le u(t) \le u_{\max}$, $\beta -$известный постоянный коэффициент. Связь изменения массы с расходом горючего определяется формулой $\dot{m}(t) = -u(t)$. Требуется найти режим расхода топлива, обеспечивающий нулевую скорость аппарата в точке прилунения и минимальные суммарные затраты топлива. Время посадки заранее не оговаривается.

Перейдем к формализации поставленной задачи как задачи оптимального управления. Роль управляющего воздействия играет скалярная функция $u = u(t)$, стесненная ограничениями типа (1.2):

$$0 \le u(t) \le u_{\max}, \ t \in [t_0, t_1].$$

В качестве вектор-функции, характеризующей состояние процесса, выберем $x = (x_1, x_2, x_3)$. Здесь $x_1(t)$ – высота аппарата в момент t, $x_2(t)$ – скорость, $x_3(t)$ – масса аппарата. Тогда

$$\dot{x}_1 = x_2.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$m(t)\dot{x}_2 = \beta u(t) - m(t) g_Л \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{\beta u(t)}{x_3} - g_Л.$$

По определению расхода топлива

$$\dot{x}_3 = -u(t).$$

Приведенные три дифференциальные уравнения образуют систему (1.3), определяющую дифференциальную связь между состоянием и управлением. Ограничениями (1.1) являются начальные условия

$$x_1(0) = h, \ x_2(0) = \omega_0, \ x_3(0) = m_0$$

и условия, обеспечивающие мягкое прилунение:

$$x_1(t_1) = 0, \ x_2(t_1) = 0.$$

Требуется минимизировать суммарный расход топлива, т.е.

$$J[u, t_1] = m_0 - x_3(t_1) \to \min.$$

Этот же функционал можно записать и в интегральном виде:

$$J[u, t_1] = \int_0^{t_1} u(t)\,dt.$$

Рассматриваемый пример представляет собой задачу Лагранжа с закрепленным начальным моментом $t_0 = 0$, нефиксированным конечным моментом t_1, закрепленным левым концом траектории и подвижным правым концом.

Интересна структура решения. Программа оптимального управления состоит из двух участков: свободное падение до момента $\tilde{t} > 0$ при $u(t) \equiv 0$, полное торможение на отрезке $[\tilde{t}, t_1]$ при $u(t) = u_{\max}$.

2.2. Оптимальное планирование поставки продукции

Рассмотрим процесс непрерывного производства и поставки продукции в течение периода времени $[t_0,t_1]$.Спрос на продукцию определяется известной функцией $r = r(t), t \in [t_0,t_1]$.

Несовпадение объема поставки $x(t)$ и потребности $r(t)$ приводит к убыткам. Если $\gamma(t) = x(t) - r(t) < 0$ (имеет место дефицит), то убытки обусловлены неудовлетворенностью спроса и относятся к разряду упущенной выгоды (прибыли, которую можно было бы получить при другом планировании поставок). В случае превышения объема поставок над спросом $(\gamma(t) > 0)$ убытки вызваны порчей продукции, дополнительными расходами на хранение, на поиск других потребителей и т.п. Предполагается, что функция потерь $f_1(\gamma)$ - известная зависимость: $f_1(\gamma) = 0$, если $\gamma = 0$; $f_1(\gamma) > 0$, если $\gamma \neq 0$. Дополнительные потери производителей продукции связаны с затратами на перестройку производства при изменении объемов поставки продукции. Эти потери равны нулю при постоянной интенсивности производства ($\dot{x}(t) = 0$). Функция убытков производителя $f_2(\dot{x})$ представляет собой известную зависимость: $f_2(\dot{x}) = 0$, если $\dot{x} = 0$; $f_2(\dot{x}) > 0$, если $\dot{x} \neq 0$. Скорость изменения поставок не может быть произвольной, а находится в заданных пределах:

$$A \le \dot{x}(t) \le B, t \in [t_0,t_1]. \tag{2.1}$$

Требуется определить характеризующую поставки продукции функцию $x(t)$, для которой сводятся к минимуму суммарные потери, связанные с возможным несовпадением объема поставок и спроса, а также с возможными перестройками производства в течение периода времени $[t_0,t_1]$. Считаем, что известно начальное состояние: $x(t_0) = x_0$.Целевой функционал, определяющий суммарные потери, имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [f_1(x(t) - r(t)) + f_2(\dot{x}(t))]dt.$$

Задачу минимизации данного функционала можно рассматривать как задачу вариационного исчисления в классе кусочно-гладких на отрезке $[t_0,t_1]$ функций с закрепленным левым и свободным правым концами при наличии во всех точках отрезка $[t_0, t_1]$ нестандартного (для вариационного исчисления) ограничения (2.1).

Исследуемую задачу можно интерпретировать как задачу оптимального управления, введя скалярную функцию управления $u = u(t)$, определяющую динамику изменения объема поставки продукции:

$$\dot{x} = u,\ x(t_0) = x_0,\ A \le u \le B,\ t \in [t_0, t_1],$$

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} [f_1(x(t) - r(t)) + f_2(u)]dt \to \min.$$

Согласно приведенной выше классификации, мы пришли к задаче Лагранжа с закрепленным временем, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Отметим, что в примере нас интересует не столько вид оптимального управления, сколько соответствующее этому управлению состояние.

3. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Принцип максимума Понтрягина

В 1956 г. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе и Е.Ф.Мищенко предложили метод, который обобщил методы классического вариационного исчисления в случае задач, в которых управляющие воздействия описываются кусочно-непрерывными функциями, а множество значений этих функций принадлежит замкнутому ограниченному множеству. В основу этого метода положен так называемый принцип максимума.

Принцип максимума дает необходимые условия оптимальности, которые позволяют выделить из множества допустимых процессов некоторое подмножество процессов, "подозрительных" на оптимальность. В этом смысле метод решения задач оптимального управления на основе принципа максимума аналогичен методам исследования функций одного или нескольких переменных, при которых отбираются точки, удовлетворяющие необходимым условиям, а каждая из отобранных точек анализируется, например, с помощью достаточных условий. В рамках теории оптимального управления необходимые условия хороши тогда, когда с их помощью удается выделить небольшое количество процессов, которые могут быть оптимальными. Принцип максимума для широкого круга задач дает возможность определить единственную траекторию, которая может быть оптимальной. Если в конкретной задаче из каких-либо соображений (например, из содержательного смысла этой задачи) известно, что оптимальное управление существует, то выделение единственной траектории, "подозрительной" на оптимальность, дает решение задачи.

Первое доказательство принципа максимума дал Р.В.Гамкрелидзе для линейных задач оптимального управления. Он построил полную теорию линейных систем управления и доказал достаточность принципа максимума для таких систем. Таким образом, для линейных задач оптимального управления принцип максимума – необходимое и достаточное условие оптимальности.

В общем нелинейном случае принцип максимума доказал В.Г.Болтянский, который и построил основы нелинейной теории оптимального управления.

Пусть поведение управляемого объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{3.1}$$

где

1) $t \in I = [t_0, t_1]$ - время, моменты t_0 и t_1 фиксированы;

2) $x \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния системы, $x(t_0) = x_0$, т.е. левый конец траектории закреплен;

3) при управлении используется информация только о времени, т.е. рассматривается программное управление $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$; U - компакт;

4) множество допустимых управлений образуют кусочно-непрерывные функции со значениями в множестве U;

5) относительно функции f будем предполагать, что она удовлетворяет условиям теорем существования, единственности и продолжимости решений.

Требуется найти такое управление $u(t)$ и соответствующую ему траекторию, что критерий качества

$$J[u] = \Phi(x(t_1)) \to \min. \tag{3.2}$$

Определение 3.1. Говорят, что допустимое управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$ удовлетворяют <u>принципу максимума Понтрягина</u>, если относительно $u(t)$, $x(t)$ и решения <u>сопряженной системы</u>

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(t, x, \psi, u)}{\partial x}, \tag{3.3}$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x}, \tag{3.4}$$

где $H(t, x, \psi, u) = \psi^T f(t, x, u) -$ <u>функция Гамильтона</u>, в каждой точке t выполнено условие максимума

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), \psi(t), u). \tag{3.5}$$

Теорема 3.1 (принцип максимума Понтрягина). Пусть в области $Q = \{t \in I = [t_0, t_1], x \in \mathbb{R}^n, u \in U\}$ выполнены следующие условия:

1) функция $f(t, x, u)$ непрерывна вместе со своей производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ;

2) функция $\Phi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Тогда, если $u(t)$ – оптимальное управление, а $x(t)$- соответствующая ему траектория, то пара $u(t)$, $x(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина.

Доказательство состоит из трех этапов:

I. Построение игольчатой вариации. Рассмотрим управление

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{при} \quad t \in I \setminus [\theta, \theta + \varepsilon), \\ v & \text{при} \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases}$$

где $\theta \in [t_0, t_1)$, $\varepsilon > 0$ таково, что $\theta + \varepsilon \le t_1$, $v \in U$.

Таким образом, управление $\tilde{u}(t)$ всюду на I, за исключением множества $[\theta, \theta + \varepsilon)$, совпадает с управлением $u(t)$, а на множестве $[\theta, \theta + \varepsilon)$ принимает постоянное значение v из множества U. При любых θ, ε, v, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, управление $\tilde{u}(t)$ является кусочно-непрерывным и принимает значения из U, поэтому оно допустимо.

Вариация $\delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$ называется игольчатой.

II. Приращение траектории на игольчатой вариации. Обозначим траекторию, соответствующую управлению $\tilde{u}(t)$, через $\tilde{x}(t)$. Тогда $\delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ - приращение траектории на игольчатой вариации. Оценим $\delta x(t)$.

Так как $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ - траектории системы (3.1), то

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) = \dot{\tilde{x}}(t) - \dot{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)) = \\ = f(t, x(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

при $t \in I$ и $\delta x(t_0) = \tilde{x}(t_0) - x(t_0) = x_0 - x_0 = 0$, так как левый конец траектории закреплен.

Таким образом, $\delta x(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\delta \dot{x}(t) = f(t, x(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)) \tag{3.6}$$

с начальным условием

$$\delta x(t_0) = 0. \tag{3.7}$$

Разобьем отрезок I на три части точками θ и $\theta + \varepsilon$ и оценим $\delta x(t)$ на каждом из них:

а) $t \in [t_0, \theta)$. В этом случае $\tilde{u}(t) \equiv u(t)$ и $\delta x(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\delta \dot{x}(t) = f(t, x(t) + \delta x(t), u(t)) - f(t, x(t), u(t)) \qquad (3.8)$$

с начальным условием $\delta x(t_0) = 0$.

Правая часть (3.8) удовлетворяет условиям теоремы Пикара-Коши (на каждом из промежутков непрерывности управления $u(t)$). Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\delta x(t) \equiv 0$ удовлетворяет данной задаче Коши. Следовательно, $\delta x(t) \equiv 0$ - единственное решение задачи Коши (3.8).

Таким образом, $\delta x(t) \equiv 0$ на $[t_0, \theta)$.

б) $t \in [\theta, \theta + \varepsilon)$. В этом случае $\tilde{u}(t) \equiv v$ и $\delta x(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\delta \dot{x}(t) = f(t, x(t) + \delta x(t), v) - f(t, x(t), u(t)). \qquad (3.9)$$

По непрерывности доопределим $\delta x(t)$ в точке θ значением равным 0:

$$\delta x(\theta) = 0.$$

Дифференциальное уравнение (3.9) эквивалентно интегральному уравнению:

$$\delta x(t) = \int_{\theta}^{t} [f(s, x(s) + \delta x(s), v) - f(s, x(s), u(s))] ds.$$

Под знаком интеграла прибавим и вычтем $f(s, x(s), v)$:

$$\delta x(t) = \int_{\theta}^{t} [f(s, x(s) + \delta x(s), v) - f(s, x(s), v)] ds + \int_{\theta}^{t} [f(s, x(s), v) - f(s, x(s), u(s))] ds.$$

Оценим по норме, используя условие Липшица:

$$\|\delta x(t)\| = \int_{\theta}^{t} \|f(s, x(s) + \delta x(s), v) - f(s, x(s), v)\| ds +$$

$$+ \int_{\theta}^{t} \|f(s, x(s), v) - f(s, x(s), u(s))\| ds \le$$

$$\le \lambda \int_{\theta}^{t} \|\delta x(s)\| ds + \int_{\theta}^{t} \|f(s, x(s), v) - f(s, x(s), u(s))\| ds.$$

Так как $s \in [\theta, \theta + \varepsilon) \subset I$, v изменяется на компактном множестве U, подынтегральная функция кусочно - непрерывна по (s, v), то теореме Вейерштрасса существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$\|f(s,x(s),v)-f(s,x(s),u(s))\|\le K\,.$$

Тогда

$$\|\delta x(t)\|\le\lambda\int_{\theta}^{t}\|\delta x(s)\|ds+K(t-\theta)\le\lambda\int_{\theta}^{t}\|\delta x(s)\|ds+K\varepsilon\,.$$

В силу леммы Гронуолла - Беллмана при $\varepsilon\le\varepsilon_0$ имеем

$$\|\delta x(t)\|\le K\varepsilon e^{\lambda(t-\theta)}\le K\varepsilon e^{\lambda\varepsilon}\le K_1\varepsilon\,,\ \text{где}\ K_1=Ke^{\lambda\varepsilon_0}\,. \tag{3.10}$$

в) $t\in[\theta+\varepsilon,t_1]$. В этом случае $\tilde{u}(t)\equiv u(t)$. Функция $\delta x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\delta\dot{x}(t)=f(t,x(t)+\delta x(t),u(t))-f(t,x(t),u(t))$$

с начальным условием $\|\delta x(\theta+\varepsilon)\|\le K_1\varepsilon$.

Перейдем к интегральному уравнению:

$$\delta x(t)=\delta x(\theta+\varepsilon)+\int_{\theta+\varepsilon}^{t}[f(s,x(s)+\delta x(s),u(s))-f(s,x(s),u(s))]ds\,.$$

Оценим по норме, используя условие Липшица:

$$\|\delta x(t)\|\le\|\delta x(\theta+\varepsilon)\|+\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\|f(s,x(s)+\delta x(s),u(s))-f(s,x(s),u(s))\|ds\le$$

$$\le K_1\varepsilon+\lambda\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\|\delta x(s)\|ds.$$

В силу леммы Гронуолла-Беллмана

$$\|\delta x(t)\|\le K_1\varepsilon e^{\lambda(t-\theta-\varepsilon)}\le K_1\varepsilon e^{\lambda(t_1-t_0)}\le K_2\varepsilon\,,\ \text{где}\ K_2=K_1e^{\lambda(t_1-t_0)}\,.$$

Таким образом, при $t\in I$ имеем

$$\|\delta x(t)\|\le\bar{K}\varepsilon\,,\ \text{где}\ \bar{K}=\max\{K_1,K_2\}=K_2\,. \tag{3.11}$$

Замечание 3.1. Если $\delta x(t_0)=O(\varepsilon)$, то аналогично проделанному выше можно доказать, что $\delta x(t)=O(\varepsilon)$ для всех $t\in I$.

III. Приращение функционала. Так как $u(t)$ является оптимальным управлением, то $\Delta J=J[\tilde{u}]-J[u]\ge0$.

Распишем ΔJ подробнее:

$$\Delta J=\Phi(\tilde{x}(t_1))-\Phi(x(t_1))=\Phi(x(t_1)+\delta x(t_1))-\Phi(x(t_1)).$$

Функция Φ непрерывно-дифференцируема, поэтому получим

$$\Delta J=\frac{\partial\Phi^T(x(t_1))}{\partial x}\delta x(t_1)+o(\|\delta x(t_1)\|)=-\psi^T(t_1)\delta x(t_1)+o\left(\|\delta x(t_1)\|\right). \tag{3.12}$$

Так как

$$\psi^T(t_1)\delta x(t_1)-\psi^T(t_0)\delta x(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\psi^T(t)\delta x(t)\right)' dt=\int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}^T(t)\delta x(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\psi^T(x)\delta\dot{x}(t)dt$$

и $\delta x(t_0)=0$, то в силу (3.12) имеем

$$\Delta J=-\psi^T(t_0)\delta x(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}^T(t)\delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\psi^T(t)\delta\dot{x}(t)dt+o\left(\left\|\delta x(t_1)\right\|\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}\delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\psi^T(t)\left[f(t,x(t)+\delta x(t),\tilde{u}(t))-f(t,x(t),u(t))\right]dt+o\left(\left\|\delta x(t_1)\right\|\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}\delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,x(t)+\delta x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))-H(t,x(t),\psi(t),u(t))\right]dt+o\left(\left\|\delta x(t_1)\right\|\right).$$

Во втором интеграле к подынтегральной функции прибавим и вычтем $H(t,x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))$:

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}\delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,x(t)+\delta x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))-H(t,x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))\right]dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))-H(t,x(t),\psi(t),u(t))\right]dt+o\left(\left\|\delta x(t_1)\right\|\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}-\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))}{\partial x}\right]\delta x(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}o\left(\left\|\delta x(t)\right\|\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))-H(t,x(t),\psi(t),u(t))\right]dt+o\left(\left\|\delta x(t_1)\right\|\right).$$

Так как $\tilde{u}(t)$ совпадает с $u(t)$ при $t\in I\setminus[\theta,\theta+\varepsilon)$, то имеем

$$\Delta J=\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\left[\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}-\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),v)}{\partial x}\right]\delta x(t)dt+\int\limits_{t_0}^{t_1}o\left(\|\delta x(t)\|\right)dt+$$

$$+o\left(\|\delta x(t_1)\|\right)-\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\left[H(t,x(t),\psi(t),v)-H(t,x(t),\psi(t),u(t))\right]dt\,.$$

Окончательно имеем

$$\Delta J=-\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\left[H(t,x(t),\psi(t),v)-H(t,x(t),\psi(t),u(t))\right]dt+\eta\,, \tag{3.13}$$

где

$$\eta=\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\left[\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}-\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),v)}{\partial x}\right]\delta x(t)dt+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}o\left(\|\delta x(t)\|\right)dt+o\left(\|\delta x(t_1)\|\right).$$

Так как

1) $o\left(\|\delta x(t_1)\|\right)=o(\varepsilon)$;

2) $o\left(\|\delta x(t)\|\right)=o(\varepsilon)$, а значит $\int\limits_{t_0}^{t_1}o\left(\|\delta x(t)\|\right)dt=o(\varepsilon)$;

3) $s\in[\theta,\theta+\varepsilon)\subset I$, v изменяется на компактном множестве U, функция $\left[\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}-\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),v)}{\partial x}\right]$ кусочно - непрерывна по (s,v), поэтому по теореме Вейерштрасса существует постоянная $M>0$ такая, что

$$\left\|\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}-\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),v)}{\partial x}\right\|\le M \quad \text{при} \quad t\in[\theta,\theta+\varepsilon].$$

Тогда, учитывая, что $\delta x(t)=o(\varepsilon)$, получим

$$\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\left[\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}-\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),v)}{\partial x}\right]\delta x(t)dt=$$

$$=\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}o(\varepsilon)dt=o(\varepsilon^2)=o\left(\varepsilon\right),$$

то $\eta=o(\varepsilon)$.

Следовательно, применяя формулу прямоугольников

$$\Delta J=-\left[H(\theta,x(\theta),\psi(\theta),v)-H(\theta,x(\theta),\psi(\theta),u(\theta))\right]\varepsilon+o(\varepsilon)\,. \tag{3.14}$$

Обозначим выражение, стоящее в квадратных скобках через α, тогда

$$\Delta J = -\alpha\varepsilon + o(\varepsilon) = \varepsilon\left[-\alpha + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \geq 0. \quad (3.15)$$

Покажем, что $\alpha \leq 0$. Предположим противное: $\alpha > 0$. При достаточно малых ε знак выражения $-\alpha + \dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$ определяется первым слагаемым, так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Но тогда $\Delta J = \varepsilon\left[-\alpha + \dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] < 0$, что противоречит (3.15). Следовательно, $\alpha \leq 0$.

В силу произвольности θ и v на управлении $u(t)$ достигается максимум функции Гамильтона H и теорема доказана.

Замечание 3.2. В ходе доказательства получена формула для приращения

$$\Delta J = -\psi^T(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,x(t),\psi(t),\tilde{u}(t)) - H(t,x(t),\psi(t),u(t))\right]dt + \eta,$$

где $\eta = o(\varepsilon)$.

Замечание 3.3. Результат теоремы останется справедливым, если допустить, что функция $f(t,x,u)$ кусочно-непрерывна по первому аргументу $t \in [t_0,t_1]$. Поэтому в дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать, что в условиях теоремы 3.1 функция $f(t,x,u)$ кусочно-непрерывна по t.

Следствие 3.1. Рассмотрим систему управления, описываемую системой дифференциальных уравнений (3.1), но с критерием качества в форме Больца:

$$J[u] = \Phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)dt \to \min, \quad (3.16)$$

где $F(t,x,u)$ - непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ.

Сведем данную задачу к задаче Майера путем введения дополнительной переменной x_{n+1}:

$$\dot{x}_{n+1} = F(t,x,u),\ x_{n+1}(t_0) = 0.$$

Тогда критерий качества может быть записан в виде:

$$J[u]=\Phi(x(t_1))+x_{n+1}(t_1).$$

Данная задача является задачей терминального управления с новым вектором состояния $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. Функция Гамильтона имеет вид

$$H=\psi^T f(t,x,u)+\psi_{n+1}F(t,x,u),$$

сопряженная система:

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\quad \psi_i(t_1)=-\frac{\partial\Phi(x(t_1))}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n}, \tag{3.17}$$

$$\dot{\psi}_{n+1}=0,\ \psi_{n+1}(t_1)=-1.$$

Тогда $\psi_{n+1}(t)\equiv -1$ и

$$H=\psi^T f(t,x,u)-F(t,x,u), \tag{3.18}$$

а от сопряженной системы остаются только уравнения (3.17).

Теорема 3.2. Для линейного выпуклого варианта задачи (3.1), (3.16), т.е. для случая, когда

$$f(t,x,u)=A(t)x+f_1(t,u),$$
$$F(t,x,u)=F_1(t,x)+F_2(t,u),$$

где Φ и $F-$ выпуклые по x функции, выполнение (3.5), где H определяется соотношением (3.18), является необходимым и достаточным условием оптимальности процесса $(u(t),x(t))$.

3.2. Использование принципа максимума для проверки управлений на оптимальность

Предположим, что в задаче оптимального управления (3.1), (3.16) некоторое допустимое управление $u=u(t)$ требуется проверить на оптимальность с помощью принципа максимума. Рекомендуемая схема выглядит следующим образом:

1) Вычисляются функции $x=x(t)$ и $\psi=\psi(t)$ - соответствующие проверяемому управлению решения задач Коши (3.1) и (3.17).

2) Составляется функция

$$W(v,t)=H(t,x(t),\psi(t),v)-H(t,x(t),\psi(t),u(t)),\ v\in U,\ t\in[t_0,t_1],$$

где H определяется соотношением (3.18).

3) Для каждого момента $t \in [t_0, t_1)$ решается задача максимизации функции $W(v,t)$ по $v \in U$:

$$\overline{W}(t) = \max_{v \in U} W(v,t).$$

Предполагается, что для каждого фиксированного $t \in [t_0, t_1)$ данная задача математического программирования может быть решена.

4) Оценивается знак функции $\overline{W}(t)$. По построению всегда $\overline{W}(t) \geq 0$ для всех $t \in [t_0, t_1)$. Равенство нулю рассматриваемой функции для некоторого t говорит о выполнении принципа максимума в этой точке, поскольку

$$\max_{v \in U} W(v,t) = \max_{v \in U} H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t)).$$

Таким образом, если найдутся точки $t \in [t_0, t_1)$, в которых $\overline{W}(t) > 0$, то управление $u = u(t)$ не удовлетворяет принципу максимума, и, следовательно, заведомо не является оптимальным.

В случае $\overline{W}(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1)$, проверяемое управление удовлетворяет принципу максимума, т.е. подозрительно на оптимальность.

Пример 3.1. В задаче

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1,\\
&\dot{x}_2 = u, \quad x_2(0) = 2,\\
&|u| \leq 1, \quad t \in [0,5],\\
&J[u] = x_1^2(5) + x_2^2(5) \to \min
\end{aligned}$$

проверить на оптимальность функцию

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \in [0,1), \\ 0, t \in [1,2), \\ -1, t \in [2,5] \end{cases}$$

и вычислить значение целевого функционала, соответствующего данному управлению.

Попытаемся реализовать изложенную выше схему:

1) При вычислении решения исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающего проверяемому управлению, целесообразно начать со второго уравнения системы.

При $t \in [0,1)$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t u(s)ds = 2 + \int_0^t 1 \cdot ds = 2 + t;$$

при $t \in [1,2)$

$$x_2(t) = x_2(1) + \int_1^t u(s)ds = (2+t)\big|_{t=1} + \int_1^t 0 \cdot ds = 3;$$

при $t \in [2,5]$

$$x_2(t) = x_2(2) + \int_2^t u(s)ds = 3 + \int_2^t (-1) \cdot ds = 3 - (t-2) = 5 - t.$$

Найденные значения функции $x_2(t)$ подставляем в правую часть первого уравнения системы.

При $t \in [0,1)$

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t x_2(s)ds = 1 + \int_0^t (2+s) \cdot ds = 1 + 2t + \frac{t^2}{2};$$

при $t \in [1,2)$

$$x_1(t) = x_1(1) + \int_1^t x_2(s)ds = \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=1} + \int_1^t 3 \cdot ds = \frac{7}{2} + 3(t-1) = 3t + \frac{1}{2};$$

при $t \in [2,5]$

$$x_1(t) = x_1(2) + \int_2^t x_2(s)ds = \left(3t + \frac{1}{2}\right)\Bigg|_{t=2} + \int_2^t (5-s) \cdot ds =$$

$$= \frac{13}{2} + 5(t-2) - \frac{1}{2}(t^2 - 4) = -\frac{t^2}{2} + 5t - \frac{3}{2}.$$

Итак,

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 + 2t + \dfrac{t^2}{2}, & t \in [0,1), \\ 3t + \dfrac{1}{2}, & t \in [1,2), \\ -\dfrac{t^2}{2} + 5t - \dfrac{3}{2}, & t \in [2,5], \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} t+2, & t \in [0,1), \\ 3, & t \in [1,2), \\ 5-t, & t \in [2,5]. \end{cases}$$

Как и следует из теории, решение исходной системы - непрерывная вектор-функция, кусочно-дифференцируемая на отрезке $[0,5]$. Точками, в которых производная может не существовать (левая производная не равна правой), являются точки разрыва управления.

Для более сложных систем дифференциальных уравнений, в которых решение не может быть получено сразу в явном виде интегрированием правой части, нужно использовать обычные методы решения дифференциальных уравнений. Уравнения необходимо рассматривать на каждом участке непрерывности функции управления, не забывая пересчитывать начальные условия по мере продвижения к конечной точке отрезка.

Составим функцию Гамильтона:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Сопряженная задача имеет вид

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \psi_1(5) = -2x_1(5),$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \psi_2(5) = -2x_2(5).$$

Условия Коши для сопряженной системы, отвечающие проверяемому управлению:

$$\psi_1(5) = -22, \quad \psi_2(5) = 0.$$

Соответствующее решение сопряженной системы

$$\psi_1(t) = -22, \quad \psi_2(t) = 22(t-5), \quad t \in [0,5].$$

2) Составим функцию

$$W(v,t) = H(t,x(t),\psi(t),v) - H(t,x(t),\psi(t),u(t)) = \psi_2(t)(v-u(t)) =$$

$$= \begin{cases} 22(t-5)(v-1), t \in [0,1), \\ 22(t-5)v, t \in [1,2), \\ 22(t-5)(v+1), t \in [2,5]. \end{cases}$$

3) Задача максимизации по v функции $W(v,t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,5)$ представляет собой задачу поиска максимума линейной функции одной переменной на отрезке $[-1,1]$. Решение задачи зависит от знака коэффициента при v. Поскольку при $t \in [0,5)$ этот коэффициент $22(t-5)$ отрицателен, то максимум искомой функции достигается при $v = -1$. Следовательно,

$$\bar{W}(t)=\begin{cases}-44(t-5),\, t\in[0,1),\\ -22(t-5),\, t\in[1,2),\\ 0,\, t\in[2,5).\end{cases}$$

4. Функция $\bar{W}(t)$ положительна на полуинтервале $[0,2)$. Поэтому проверяемое управление не удовлетворяет принципу максимума. Итак, управление $u(t)$ заведомо не может быть оптимальным.

Значение функционала на управлении $u(t)$ равно 121.

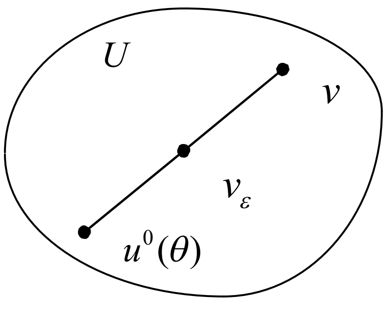
3.3. Дифференциальный принцип максимума

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 (с учетом замечания 3.3) и, кроме того, функция $f(t,x,u)$ дифференцируема по u и множество U является выпуклым. Тогда оптимальное управление $u^0(t),\ t\in[t_0,\ t_1),$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial H^T(t,x^0(t),\psi^0(t),u^0(t))}{\partial u}u^0(t)=\max_{u\in U}\frac{\partial H^T(t,x^0(t),\psi^0(t),u^0(t))}{\partial u}u\,. \qquad (3.19)$$

<u>Доказательство.</u> Предположим противное, т.е. существует точка $\theta\in[t_0,\ t_1)$, вектор $v\in U$ и число $\alpha>0$ такие, что

$$\frac{\partial H^T(\theta,x^0(\theta),\psi^0(\theta),u^0(\theta))}{\partial u}u^0(\theta)=\frac{\partial H^T(\theta,x^0(\theta),\psi^0(\theta),u^0(\theta))}{\partial u}v-\alpha\,. \qquad (3.20)$$



Так как множество U выпукло, то отрезок, соединяющий точки $u^0(\theta)$ и v принадлежит множеству U. Выберем на нем точку v_ε:

$$v_\varepsilon=u^0(\theta)+\varepsilon(v-u^0(\theta)),\ \varepsilon\in[0,1]\,.$$

В силу принципа максимума

$$0\ge H(\theta,x^0(\theta),\psi^0(\theta),v_\varepsilon)-H(\theta,x^0(\theta),\psi^0(\theta),u^0(\theta))=$$

$$=\frac{\partial H^T(\theta,x^0(\theta),\psi^0(\theta),u^0(\theta))}{\partial u}(v_\varepsilon-u^0(\theta))+o\left(\left\|v_\varepsilon-u^0(\theta)\right\|\right)=$$

$$=\varepsilon\frac{\partial H^T(\theta,x^0(\theta),\psi^0(\theta),u^0(\theta))}{\partial u}(v-u^0(\theta))+o\left(\varepsilon\left\|v-u^0(\theta)\right\|\right)=$$

$$=\varepsilon\alpha+o(\varepsilon)=\varepsilon\left(\alpha+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)>0$$

при достаточно малых ε, т.к. $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ и знак выражения $\alpha+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$ определяется первым слагаемым. Получили противоречие, тем самым теорема доказана.

Следствие 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.3 и, кроме того, множество U открыто. Тогда оптимальное управление $u^0(t)$ в каждый момент $t\in[t_0,\ t_1)$ доставляет стационарное значение гамильтониану системы, т.е.

$$\frac{\partial H(t,x^0(t),\psi^0(t),u^0(t))}{\partial u}=0. \tag{3.21}$$

Доказательство. Так как множество U открытое, то оптимальное управление $u^0(t)$ в каждый момент времени t входит в множество U с некоторой δ-окрестностью. Тогда утверждение следствия непосредственно следует из (3.19), так как если $\frac{\partial H(t,x^0(t),\psi^0(t),u^0(t))}{\partial u}\neq 0$, то выражение стоящее слева можно увеличить, если в качестве вектора u выбрать $u=u^0(t)+v$, где $\frac{\partial H^T(t,x^0(t),\psi^0(t),u^0(t))}{\partial u}v>0$.

3.4. Свойства функции Гамильтона на экстремальных траекториях

Иногда отсеять заведомо неоптимальные управления помогает знание свойств функции Гамильтона на удовлетворяющих принципу максимума управлениях.

Допустимое управление $u(t)$ называется экстремальным, если вдоль него и соответствующих ему траекторий $x(t)$, $\psi(t)$ основной и сопряженной систем (3.1) и (3.17) выполняется условие максимума (3.5).

Траектория $x(t)$, соответствующая экстремальному управлению, называется экстремальной.

Теорема 3.4. Пусть функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет всем условиям теоремы принципа максимума и, кроме того, непрерывна по t. Тогда функция Гамильтона вдоль экстремальных управлений непрерывна по t.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим произвольную точку $t \in [t_0,\ t_1]$ и Δ настолько малое, что $t+\Delta \in [t_0,\ t_1]$. Тогда

$$H(t) = H(t,x(t),\psi(t),u(t)) \ge H(t,x(t),\psi(t),u(t+\Delta));$$

$$H(t+\Delta) = H(t+\Delta,x(t+\Delta),\psi(t+\Delta),u(t+\Delta)) \ge H(t+\Delta,x(t+\Delta),\psi(t+\Delta),u(t))$$

Оценим $H(t+\Delta)-H(t)$:

$$\begin{aligned} &H(t+\Delta,x(t+\Delta),\psi(t+\Delta),u(t)) - H(t,x(t),\psi(t),u(t)) \le H(t+\Delta)-H(t) \le \\ &\le H(t+\Delta,x(t+\Delta),\psi(t+\Delta),u(t+\Delta)) - H(t,x(t),\psi(t),u(t+\Delta)) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Устремим $\Delta \to 0$. Функция Гамильтона $H(t,x,\psi,u) = \psi^T f(t,x,u)$ непрерывна по первым трем аргументам, следовательно, по теореме о пределе промежуточной функции

$$H(t+\Delta)-H(t) \to 0 \text{ при } \Delta \to 0$$

т.к. оценки снизу и сверху разности $H(t+\Delta)-H(t)$ стремятся к 0 при $\Delta \to 0$.

Замечание 3.4. Если рассматривать функцию Гамильтона на произвольных траекториях, она будет кусочно-непрерывной.

Теорема 3.5. Пусть функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1 и, кроме того, дифференцируема по t. Тогда в каждой точке непрерывности экстремального управления полная производная по времени от функции Гамильтона равна ее частной производной по времени:

$$\frac{dH(t,x(t),\psi(t),u(t))}{dt} = \frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}. \tag{3.23}$$

Замечание 3.5. Левая часть (3.23) получается подстановкой в H функций $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$, а затем производится дифференцирование по t. Правая часть (3.23) получается путем дифференцирования по t функции $H(t,x,\psi,u)$, а затем подставляются функции $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $t \in (t_0,\ t_1)$ - точка непрерывности экстремального управления $u(t)$ и $\Delta > 0$ настолько мало, что $t+\Delta \in (t_0,\ t_1)$. Разделим левую часть неравенства (3.22) на $\Delta > 0$:

$$\frac{H(t+\Delta,x(t+\Delta),\psi(t+\Delta),u(t)) - H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\Delta} \le \frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta}.$$

Следовательно,

$$\frac{H(t+\Delta,x(t+\Delta),\psi(t+\Delta),u(t))-H(t,x(t+\Delta),\psi(t+\Delta),u(t))}{\Delta}+$$

$$+\frac{H(t,x(t+\Delta),\psi(t+\Delta),u(t))-H(t,x(t),\psi(t+\Delta),u(t))}{\Delta}+$$

$$+\frac{H(t,x(t),\psi(t+\Delta),u(t))-H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\Delta}\le\frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta}.$$

Переходя к пределу при $\Delta\to 0$, получим:

$$\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}+\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}\dot{x}+$$

$$+\frac{\partial H^T(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial\psi}\dot{\psi}\le\lim_{\Delta\to 0}\frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta}$$

или, учитывая, что

$$\dot{x}=f(t,x,u)=\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial\psi},\ \dot{\psi}=-\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}$$

имеем

$$\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}\le\lim_{\Delta\to 0}\frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta}. \tag{3.24}$$

Аналогично из правой части неравенства (3.22) получим

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{H(t+\Delta)-H(t)}{\Delta}\le\frac{\partial H(t,x(t),\psi(t),u(t))}{\partial t}. \tag{3.25}$$

Из (3.24) и (3.25) следует, что полная производная по t функции Гамильтона существует и совпадает с ее частной производной по t. Теорема доказана.

Следствие 3.3. Вдоль экстремального управления стационарной системы функция Гамильтона постоянна.

Доказательство. Для стационарной системы функция f явно не зависит от t, т.е. $f=f(x,u)$. Тогда $\frac{\partial H}{\partial t}=0$. Следовательно, в силу теоремы 3.5 $\frac{dH}{dt}=0$ во всех точках непрерывности управления $u(t)$. Так как управление $u(t)$ кусочно-непрерывно на промежутке $[t_0,\ t_1]$, то $\frac{dH}{dt}=0$ за возможным исключением конечного числа точек. Кроме того, в силу теоремы 3.4

функция $H(t)$ непрерывна. Таким образом, $H(t) \equiv const$ на экстремальной траектории.

Замечание 3.6. Теоремы 3.4 и 3.5 и следствие к теореме 3.5 можно использовать для проверки управления на оптимальность: если $H(t)$ разрывна или не постоянна (для стационарных систем), то управление $u(t)$ не является оптимальным.

К сделанному ранее выводу о неоптимальности управления в примере 3.1 можно прийти, используя теорему 3.4. Действительно, функция Гамильтона, подсчитанная на управлении $u(t)$ и соответствующих траекториях $x(t)$, $\psi(t)$ основной и сопряженной систем, имеет вид

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \begin{cases} -22(t+2) + 22t - 110 = -154, t \in [0,1), \\ -22 \cdot 3 = -66, t \in [1,2), \\ -22(5-t) - 22t + 110 = 0, t \in [2,5] \end{cases}$$

и не является непрерывной. Кроме того, в силу следствия 3.3 вдоль экстремального управления стационарной системы функция Гамильтона постоянна, что в данном примере не выполняется.

3.5. Применение принципа максимума для решения задач оптимального управления

Пример 3.2. Решить задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = tu_1 - u_2, \quad x_1(0) = 0, \\ &\dot{x}_2 = x_1 + u_2 - 2u_3^2, \quad x_2(0) = 0, \\ &t \in [0,2], \quad u_1 \in [0,2], \quad |u_2| \le 1, \quad u_3 \in \{-4, 0, 1, 3\}, \\ &J[u] = x_2(2) \to \min. \end{aligned}$$

1) Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \psi_1(tu_1 - u_2) + \psi_2(x_1 + u_2 - 2u_3^2).$$

Сопряженная система:

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}_1 = -\psi_2, \quad \psi_1(2) = 0, \\ &\dot{\psi}_2 = 0, \quad \psi_1(2) = -1 \end{aligned}$$

имеет своими решениями функции

$$\psi_1(t) = t - 2, \quad \psi_2(t) \equiv -1.$$

2) Оптимальное управление определяется путем решения для каждого фиксированного момента $t \in [0,2)$ задачи математического программирования

$$H = (t-2)(tu_1 - u_2) - (x_1 + u_2 - 2u_3^2) = (t-2)tu_1 - (t-1)u_2 + 2u_3^2 - x_1 \to \max,$$
$$u_1 \in [0,2], \quad |u_2| \le 1, \quad u_3 \in \{-4,1,2,3\}.$$

В виду сепарабельности целевой функции и вида ограничений, накладываемых на компоненты управления, данная задача равносильна следующим:

а) $(t-2)tu_1 \to \max, u_1 \in [0,2]$. Поскольку $(t-2)t < 0, t \in (0,2)$, то $u_1^*(t) \equiv 0, \quad t \in [0,2)$.

б) $-(t-1)u_2 \to \max, \quad |u_2| \le 1$. Так как $-(t-1) > 0$ при $t \in [0,1)$ и $-(t-1) < 0$ при $t \in (1,2)$, то

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ -1, & t \in [1,2). \end{cases}$$

Вообще говоря, значением $u_2^*(1)$ может быть любое число из множества $[-1,1]$. Поскольку для определенности мы предположили, что компоненты допустимого управления непрерывны справа, то $u_2^*(1) = -1$.

в) $2u_3^2 \to \max, \quad u_3 \in \{-4,0,1,3\}$. Получаем $u_3^*(t) = -4, \quad t \in [0,2)$.

3) Соответствующее найденному управлению состояние процесса определяется после подстановки $u^*(t)$ в правую часть исходной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = -1, \quad x_1(0) = 0, \quad t \in [0,1).$$

Отсюда $x_1^*(t) = -t, \quad t \in [0,1)$ и

$$\dot{x}_2 = -t - 31, \quad x_2(0) = 0, \quad t \in [0,1).$$

Имеем $x_2^*(t) = -\dfrac{t^2}{2} - 31t, \quad t \in [0,1)$.

При $t \in [1,2)$:

$$\dot{x}_1 = 1, \quad x_1(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1^*(t) = t - 2;$$

$$\dot{x}_2 = t - 35, \quad x_2(1) = -31.5 \quad \Rightarrow \quad x_2^*(t) = \frac{t^2}{2} - 35t + 3.$$

Таким образом, компоненты найденной вектор - функции состояния имеют вид:

$$x_1^*(t)=\begin{cases}-t, & t\in[0,1),\\ t-2, & t\in[1,2],\end{cases}\qquad x_2^*(t)=\begin{cases}-\dfrac{t^2}{2}-31t, & t\in[0,1),\\ \dfrac{t^2}{2}-35t+3, & t\in[1,2].\end{cases}$$

Данная задача относится к классу линейно-выпуклых, поэтому найденные управление и соответствующее ему состояние являются оптимальными.

Пример 3.3. Рассмотрим одну из задач оптимального планирования инвестиций. Пусть $x(t)-$объем выпуска продукции в момент времени t в стоимостном выражении; $y_1(t)-$часть выпуска продукции, расходуемая на инвестиции в производство; $y_2(t)-$часть выпуска, расходуемая на потребление. Известен начальный объем выпуска $x(0)=c>0.$ Предполагается, что прирост выпуска продукции к некоторому моменту времени пропорционален суммарному объему инвестиций, сделанных за все предшествующие промежутки времени. Тогда

$$x(t)=y_1(t)+y_2(t),\quad y_1(t)\ge 0,\quad y_2(t)\ge 0,$$

$$x(t)=c+\alpha\int_0^t y_1(s)ds,$$

где $\alpha>0-$ известный параметр.

Целью задачи является поиск такого распределения выпуска продукции $(y_1(t),y_2(t))$ за период времени $t\in[0,t_1]$, при котором максимизируется общий объем потребления за рассматриваемый период времени:

$$\int_0^{t_1} y_2(s)ds\to\max.$$

Перейдем к формализация задачи как задачи оптимального управления. Пусть управление $u(t)-$доля выпуска продукции, направляемая в момент t на инвестиции:

$$u(t)=\frac{y_1(t)}{x(t)}\in[0,1],\quad t\in[0,t_1].$$

Тогда

$$y_1(t) = u(t)x(t),$$
$$y_2(t) = x(t) - y_1(t) = x(t)(1 - u(t)),$$
$$x(t) = c + \alpha \int_0^t u(s)x(s)ds. \tag{3.26}$$

Дифференцируя (3.26) по t и переходя к задаче на минимум, получим

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \alpha u x, \quad x(0) = c, \\ &u \in [0,1], \quad t \in [0, t_1], \\ &J[u] = \int_0^{t_1} (u(t) - 1)x(t)dt \to \min. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Решим задачу с помощью принципа максимума. Заметим, что любому допустимому управлению соответствует решение уравнения (3.27) следующего вида:

$$x(t) = c \exp\left(\alpha \int_0^t u(s)ds \right) > 0;$$

функция Гамильтона:

$$H = \alpha \psi u x - (u - 1)x;$$

сопряженная задача:

$$\dot{\psi} = -\alpha \psi u + u - 1, \quad \psi(t_1) = 0. \tag{3.28}$$

Оптимальное управление $u^*(t)$ удовлетворяет условию

$$(\alpha \psi^*(t) - 1)x^*(t)u^*(t) = \max_{v \in [0,1]} (\alpha \psi^*(t) - 1)x^*(t)v, \quad t \in [0, t_1),$$

где $x^*(t)$ и $\psi^*(t)$ - решения исходной и сопряженной задач (3.27), (3.28). Структура оптимального управления:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, \alpha\psi(t) - 1 > 0, \\ 0, \alpha\psi(t) - 1 < 0, \\ [0,1], \alpha\psi(t) - 1 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, значение оптимального управления в точке t определяется знаком разности $\alpha\psi(t) - 1$. Поскольку $\psi(t_1) = 0$, то в окрестности точки t_1 справедливо неравенство $\alpha\psi(t) - 1 < 0$. Начнем интегрирование сопряженного уравнения (3.28) из точки t_1, подставив $u(t) = 0$:

$$\dot{\psi} = -1, \quad \psi(t_1) = 0.$$

Имеем

$$\psi(t) = t_1 - t.$$

Найдем корень $\overline{t}$ уравнения $\alpha\psi(t) - 1 = 0,$ подставив вычисленное значение ψ:

$$\alpha(t_1 - t) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{t} = t_1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Возможны два случая.

1) $\overline{t} \le 0,$ т.е. всюду на промежутке $(0, t_1]$ справедливо неравенство $\alpha\psi(t) - 1 < 0.$ Тогда оптимальным может быть только управление $u^*(t) \equiv 0, t \in [0, t_1].$ Такая ситуация имеет место, если $t_1 \le \frac{1}{\alpha},$ т.е. если процесс рассматривается на небольшом промежутке времени. В этом случае не выгодно инвестировать средства в производство, а следует направлять их все на потребление.

2) $\overline{t} \in (0, t_1),$ т.е. $t_1 > \frac{1}{\alpha}.$ Тогда нужно проанализировать три возможные ситуации, которые могут иметь место левее точки $\overline{t}$:

а) $\alpha\psi(t) - 1 > 0, t \in (\tau, \overline{t}).$ В этом случае $u^*(t) = 1, t \in (\tau, \overline{t})$ и

$$\dot{\psi} = -\alpha\psi, \quad \psi(\overline{t}) = t_1 - \overline{t} = \frac{1}{\alpha}.$$

Тогда $\psi(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha(\overline{t} - t)}$ и условие $\alpha\psi(t) - 1 = e^{\alpha(\overline{t} - t)} - 1 > 0$ выполнено для всех $t \in [0, \overline{t}).$

б) $\alpha\psi(t) - 1 < 0, t \in (\tau, \overline{t}).$ Тогда $u^*(t) = 0, t \in (\tau, \overline{t})$ и

$$\dot{\psi} = -1, \quad \psi(\overline{t}) = \frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = \frac{1}{\alpha} + \overline{t} - t.$$

Но $\alpha\psi(t) - 1 = \alpha(\overline{t} - t) > 0$ при $t \in [0, \overline{t}),$ что противоречит предположению $\alpha\psi(t) - 1 < 0, t \in (\tau, \overline{t}).$

в) $\alpha\psi(t) - 1 = 0, t \in [\tau, \overline{t}].$ Тогда $\psi(t) = \frac{1}{\alpha},$ что противоречит сопряженной системе $\dot{\psi} = -\alpha \frac{1}{\alpha} u + u - 1 = -1.$

Таким образом, оптимальное управление может иметь только следующую структуру:

$$u^*(t) \equiv 0, \quad t \in [0, t_1], \text{ если } \quad t_1 \le \frac{1}{\alpha}$$

или

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, t_1 - \dfrac{1}{\alpha}\right), \\ 0, & t \in \left[t_1 - \dfrac{1}{\alpha}, t_1\right] \end{cases} \quad \text{в} \quad \text{случае} \quad t_1 > \frac{1}{\alpha}.$$

Итак, при достаточно большой продолжительности процесса необходимо в первую часть времени тратить все средства на инвестиции в производство, а в оставшееся время направлять все средства на потребление.

Пример 3.4. Рассмотрим задачу

$$\dot{x} = tu, \quad x(0) = 0,$$
$$t \in [0,1], \quad |u| \le 1,$$
$$J[u] = x^2(1) + \int_0^1 u^2(s)ds \to \min.$$

Функция Понтрягина:

$$H = \psi t u - u^2;$$

сопряженная задача:

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

Из условия минимума гамильтониана определяем

$$u(t, x, \psi) = \begin{cases} \dfrac{\psi t}{2}, & |\psi(t) \cdot t| \le 2, \\ -1, & \psi(t) \cdot t < -2, \\ 1, & \psi(t) \cdot t > 2. \end{cases}$$

Решением сопряженной задачи является функция $\psi(t) \equiv -2x(1)$, $t \in [0,1]$. Воспользовавшись тем, что $x(1) = \int_0^1 u(t)dt$ и учитывая ограничения на управление, получим

$$|x(1)| \le 1, \text{ т.е } |\psi(t) \cdot t| \le 2, \quad t \in [0,1].$$

Окончательно приходим к краевой задаче:

$$\dot{x} = \frac{\psi t}{2}, \quad \dot{\psi} = 0, \quad x(0) = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

Отсюда

$$\dot{x} = -x(1)t, \quad x(0) = 0,$$

т.е. $x(t) = -x(1)\dfrac{t^2}{2}$. При $t = 1$ должно выполняться равенство $x(1) = -\dfrac{x(1)}{2}$, что возможно лишь при $x(1) = 0$,

Таким образом,

$$x^*(t) \equiv 0, \quad u^*(t) \equiv 0, \quad \psi^*(t) \equiv 0, \quad t \in [0,1].$$

Поскольку рассматриваемая задача—линейно-выпуклая, то управление $u^*(t) \equiv 0$ оптимально. Глобальный минимум функционала равен 0.

В разобранном примере сведение к краевой задаче было осуществлено лишь для того, чтобы проиллюстрировать этот подход к решению задач оптимального управления. Ясно, что полученный результат очевиден и может быть найден непосредственным анализом вида задачи. В этом же примере изменим теперь критерий качества.

Пример 3.5. Решить сведением к краевой задаче принципа максимума

$$\dot{x} = tu, \quad x(0) = 0,$$
$$t \in [0,1], \quad |u| \le 1,$$
$$J[u] = x^2(1) - \int_0^1 u^2(s)ds \to \min.$$

Функция Понтрягина:

$$H = \psi tu + u^2;$$

сопряженная задача та же, что в примере 3.4:

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(1) = -2x(1).$$

Из условия максимума имеем

$$u(t,x,\psi) = \begin{cases} 1, & \psi(t)\cdot t > 0, \\ -1, & \psi(t)\cdot t < 0, \\ \pm 1, & \psi(t)\cdot t = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\psi(t) \equiv -2x(1)$ проанализируем три варианта:

1) $x(1) < 0$. Тогда $\psi(t) > 0$, $u(t) \equiv 1$, $t \in [0,1]$, но этому управлению соответствует состояние $x(t) = \dfrac{t^2}{2}$, т.е. $x(1) > 0$. Следовательно, данный вариант невозможен;

2) $x(1) > 0$. Аналогично предыдущему имеем $\psi(t) < 0$, $u(t) \equiv -1$, $t \in [0,1]$, $x(t) = -\dfrac{t^2}{2}$, $x(1) < 0$, вариант невозможен;

3) $x(1) = 0$. Принципу максимума удовлетворяет любое кусочно-непрерывное управление, принимающее в каждой точке полуинтервала $[0,1)$ значения ± 1, для которого соответствующее значение состояния $x(1) = 0$. Так как задача линейно-выпуклая, то такое управление оптимально.

Очевидно, что оптимальных управлений бесконечное множество. Например, глобальный минимум доставляют критерию качества функции

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -1, & t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]; \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]; \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[0, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -1, & t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right), \\ 1, & t \in \left[\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, 1\right]; \end{cases}$$

и т.п.

Глобальный минимум функционала:

$$J[u^*] = x^{*2}(1) - \int_0^1 u^{*2}(s)ds = -\int_0^1 1ds = -1.$$

Пример 3.6. Рассмотрим систему управления, описываемую системой дифференциальных уравнений

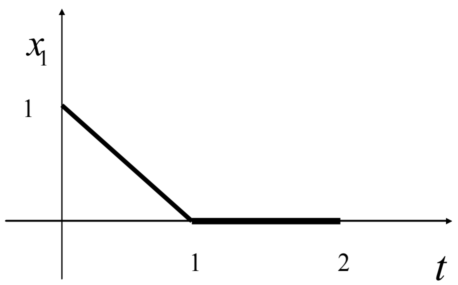
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, & x_2(0) = 0, \end{cases} \quad |u| \le 1 \tag{3.29}$$

с критерием качества $J[u] = x_2(2) \to \min$.

Решение данной задачи легко отыскать, исходя из геометрических соображений, если переписать данную задачу как задачу Лагранжа

$$\dot{x}_1 = u,\ x_1(0) = 1,\ |u| \le 1,$$
$$J[u] = \int_0^2 x_1^2(t)dt \to \min, \tag{3.30}$$

т.е. надо минимизировать площадь плоской фигуры, ограниченной осью t, графиком функции $x_1^2(t)$ и прямыми $t = 0$, $t = 2$.



Учитывая начальное условие $x_1(0) = 1$ и ограничение на наклон кривой $\dot{x}_1 = u \in [-1,1]$, искомая функция имеет вид

$$x_1 = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0,1), \\ 0, & t \in [1,2], \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,1), \\ 0, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Решим задачу (3.29), используя принцип максимума Понтрягина. Функция Гамильтона имеет вид $H = \psi_1 u + \psi_2 x_1^2$, сопряженная система:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -2x_1\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

с граничными условиями $\psi_1(2) = 0,\ \psi_2(2) = -1$.

Отсюда следует, что $\psi_2(t) \equiv -1$ и система (3.31) приобретает вид

$$\dot{\psi}_1 = 2x_1,\ \psi_1(2) = 0.$$

Управление $u(t)$ найдем из условия максимума

$$\psi_1(t)u(t) + \psi_2(t)x_1^2(t) = \max_{|u| \le 1}\left(\psi_1(t)u + \psi_2(t)x_1^2(t)\right)$$

или

$$\psi_1(t)u(t) = \max_{|u| \le 1} \psi_1(t)u,$$

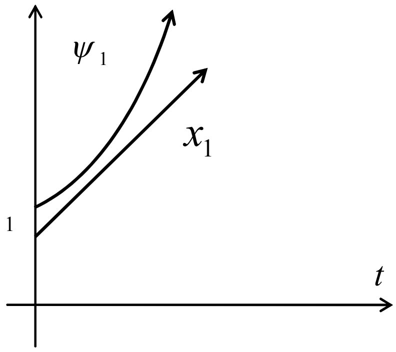
откуда

$$u(\psi_1)=\begin{cases}1, \text{ если } \psi_1(t)>0,\\ -1, \text{ если } \psi_1(t)<0,\\ [-1,1], \text{ если } \psi_1(t)=0.\end{cases}$$

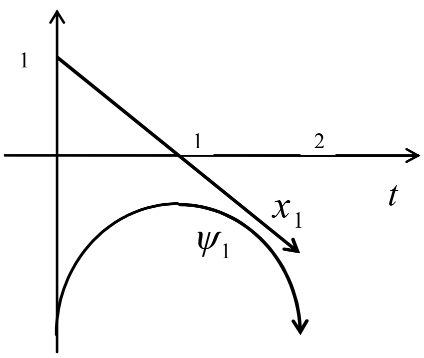
Получаем краевую задачу принципа максимума

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u(\psi_1), & x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2=x_1^2, & x_2(0)=0,\\ \dot{\psi}_1=2x_1, & \psi_1(2)=0.\end{cases}$$

Первое и третье уравнения можно решать независимо от второго. Значение $\psi_1(0)=\psi_{10}$ будем подбирать так, чтобы $\psi_1(2)=0$:



1) если $\psi_{10}>0$, то $u=1$ и x_1 растет, следовательно, и ψ_1 растет и остается положительным для всех $t\in[0,2]$, т.е. условие $\psi_1(2)=0$ не выполняется;

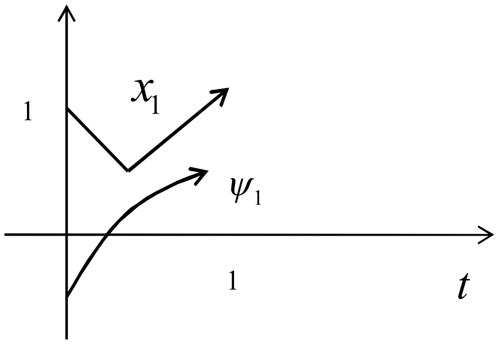


2) если $\psi_{10}<-1$, то $u=-1$ при $0\le t<\tau$. Так как $\dot{x}_1=-1$ и $x_1(0)=1$, то $x_1(t)=1-t$. При этом $\dot{\psi}_1=2(1-t)$, следовательно,

$$\psi_1(t)=\psi_{10}+\int_0^t 2(1-t)dt=\psi_{10}-(1-t)^2\Big|_0^t=$$
$$=\psi_{10}-(1-t)^2+1<0$$

для всех t.

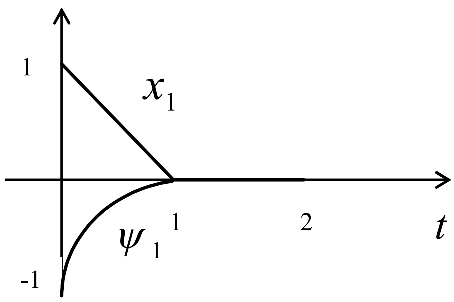
Следовательно, ψ_1 остается отрицательным на всем отрезке $[0,2]$. При этом $\psi_1(2)=\psi_{10}\neq 0$;



3) если $\psi_{10}>-1$, то $u=-1$ при $0\le t<\tau$, где τ определяется из условия $\psi_1(\tau)=0$. Так как $\dot{x}_1=-1$ и $x_1(0)=1$, то $x_1(t)=1-t$. При этом $\psi_1(t)=\psi_{10}+(1-t)^2+1$ и τ таково, что $\psi_{10}-(1-\tau)^2+1=0\Rightarrow\tau=1-\sqrt{\psi_{10}+1}$. При $t>\tau$

$\psi_1(t)$ становится положительным, $u=1$ и $x_1(t)$, не достигнув нуля, начинает возрастать и, следовательно, $\psi_1(t)$ также возрастает и задача не имеет решения.

4) если $\psi_{10}=-1$, то $u=-1$ при $0\le t<\tau$, $x_1(t)=1-t$, $\psi_1(t)=-(1-t)^2$. Таким образом, $x_1(1)=0$, $\psi_1(1)=0$. Возьмем $u(t)\equiv 0$ при $t>1$, тогда $x_1(t)\equiv 0$ и $\psi_1(t)\equiv 0$. Так как $\psi_1(t)\equiv 0$ на $[1,2]$, то u не определяется однозначно из принципа максимума. Данные управления называются <u>особыми</u>. Если $u(\tau)\neq 0$ при некотором $\tau>0$, то мы с этой неопределенности уходим, но задача не имеет решения ($\psi_1(2)\neq 0$).



Пример 3.7. Рассмотрим систему управления, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \end{cases}$$

с начальными условиями $\begin{cases} x_1(0)=1, \\ x_2(0)=0 \end{cases}$ и ограничением на управление $u=\pm 1$.

Критерий качества

$$J[u]=x_2(2)\to\min .$$

Данный пример отличается от предыдущего лишь ограничениями на управление.

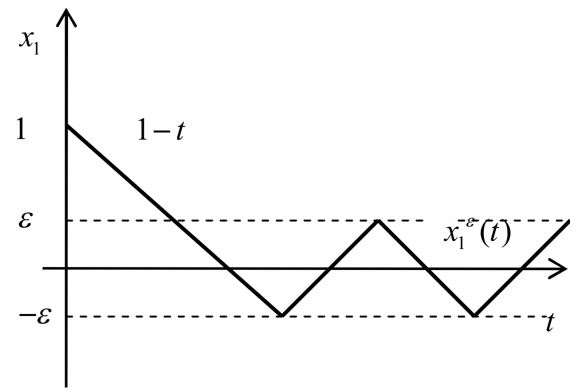
Перепишем данную задачу как задачу Лагранжа:

$$\dot{x}_1 = u,\ x_1(0)=1,\ u=\pm 1,$$

$$J[u]=\int_0^2 x_1^2(t)dt\to\min .$$

Очевидно, что искомое управление $u\equiv -1$ при $t\in[0,1)$. Далее, если брать $x_1(t)\equiv 0,\ t\in[1,2]$ (т.е. удерживать $x_1(t)$ на оси t), то $u(t)\equiv 0\notin\{-1,1\}$. Таким образом, получить $J[u]=\int_0^2 (1-t)^2\,dt=\frac{1}{3}$ мы не можем. Однако, мы можем подобрать управление $u_\varepsilon(t)$ таким образом, что $J[u_\varepsilon]\to\frac{1}{3}$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть $t\in[1,2]$. Рассмотрим полосу $|x_1|\le\varepsilon$ и будем переключать управление так, чтобы $x_1(t)$ оставалось в данной полосе. Получим траекторию $x_1^{\varepsilon}(t)$, для которой $|x_1^{\varepsilon}(t)|\le\varepsilon$, а значит



$$J_1[u_\varepsilon]=\int_1^2 (x_1^{\varepsilon}(t))^2\,dt<\varepsilon^2\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,$$

$$J[u_\varepsilon]=\frac{1}{3}+J_1[u_\varepsilon]\to\frac{1}{3}.$$

Таким образом, минимум $J[u]$ в классе кусочно-непрерывных управлений не достигается (а также в классе измеримых управлений). Предельные траектории в таких задачах получили название <u>скользящих режимов</u> - в нашем случае

$$x(t)=\begin{cases}1-t, & t\in[0,1],\\ 0, & t\in[1,2].\end{cases}$$

Пример 3.8. Рассмотрим систему управления, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u, & x_1(0)=0,\\ \dot{x}_2=-x_1^2, & x_2(0)=0,\end{cases} \tag{3.32}$$

с ограничением на управление $|u|\le 1$ и критерием качества $J[u]=x_2(1)\to\min$.

Если переписать данную задачу как задачу Лагранжа

$$\dot{x}_1=u,\ x_1(0)=0,\ |u|\le 1,$$

$$J[u]=-\int_0^1 x_1^2(t)\,dt\to\min,$$

то видно, что надо максимизировать площадь плоской фигуры, ограниченной осью t, графиком функции $x_1^2(t)$ и прямыми $t=0,\ t=1$.

Учитывая начальное условие $x_1(0)=0$ и ограничение на наклон кривой $\dot{x}_1=u\in[-1,1]$, искомая функция имеет вид

$$x_1(t)=\pm t,\ u(t)=\pm 1 \text{ и } J_{\min}=-\tfrac{1}{3}.$$

Покажем, что управления

1) $u_1(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\frac{1}{3},\\ -1, & \frac{1}{3}\le t\le 1;\end{cases}$

2) $u_2(t)\equiv 1$;

3) $u^p(t)=sign\cos\dfrac{2p+1}{2}\pi t,\ p=0,1,2,...$

удовлетворяют принципу максимума Понтрягина, однако $u_1(t)$ и $u^p(t)$ не являются оптимальными.

Запишем условия принципа максимума, применительно к данной задаче:

1) функция Гамильтона $H=u\psi_1-x_1^2\psi_2$;

2) сопряженная система $\begin{cases}\dot{\psi}_1=2x_1\psi_2, & \psi_1(1)=0,\\ \dot{\psi}_2=0, & \psi_2(1)=-1,\end{cases}$

откуда $\psi_2(t)\equiv -1$ и система сводится к следующей:

$$\dot{\psi}_1=-2x_1,\quad \psi_1(0)=0. \tag{3.33}$$

Условие максимума

$$u(t)\psi_1(t)-x_1^2(t)\psi_2(t)=\max_{|u|\le 1}(u\psi_1(t)-x_1^2(t)\psi_2(t))$$

или

$$u(t)\psi_1(t)=\max_{|u|\le 1}u\psi_1(t),$$

откуда

$$u(t)=\begin{cases}1, \text{ если } \psi_1(t)>0,\\ -1, \text{ если } \psi_1(t)<0,\\ [-1,\ 1], \text{ если } \psi_1(t)=0.\end{cases} \tag{3.34}$$

1) Рассмотрим управление $u_1(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\dfrac{1}{3},\\ -1, & \dfrac{1}{3}\le t\le 1.\end{cases}$ Данное управление является допустимым (кусочно-непрерывно и удовлетворяет ограничению $|u|\le 1$). Покажем, что оно удовлетворяет принципу максимума Понтрягина:

а) $t\in\left[0,\ \dfrac{1}{3}\right)\ \Rightarrow\ u(t)\equiv 1$. Тогда из (3.32) и (3.33) имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, & x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = t, \text{ причем } x_1\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}, \\ \dot{x}_2 = -t^2 \;\Rightarrow\; x_2(t) = -\dfrac{t^3}{3}, \text{ причем } x_2\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{81}, \\ \dot{\psi}_1 = -2t \;\Rightarrow\; \psi_1 = -t^2 + \psi_{10}, \text{ где } \psi_{10} \text{ будем подбирать} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{из условия } \psi_1(1) = 0; \end{cases}$$

б) $t \in \left[\dfrac{1}{3}, 1\right] \Rightarrow u(t) \equiv -1$. Тогда из (3.32) и (3.33) имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, & x_1\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, & x_2\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{81}, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1, & \psi_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{2}{3} - t, \\ \dot{x}_2 = -\left(t - \dfrac{2}{3}\right)^2, \quad x_2\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{81}, \\ \dot{\psi}_1 = 2\left(t - \dfrac{2}{3}\right), \; \psi_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{2}{3} - t, \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{3}\left(t - \dfrac{2}{3}\right)^3 - \dfrac{2}{81}, \\ \psi_1(t) = \left(t - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{81}. \end{cases}$$

Значение ψ_{10} находится из условия $-\dfrac{1}{9} + \psi_{10} = 0$, т.е. $\psi_{10} = \dfrac{1}{9}$. Таким образом, $\psi_1(t) > 0$ при $t \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right)$; при $t = \dfrac{1}{3}$ $\psi_1(t) = 0$ и происходит переключение управления; $\psi_1(t) < 0$ при $t \in \left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$, т.е. условие (3.34) выполнено.

В данном случае $J[u] = x_2(1) = -\dfrac{1}{81}$.

2) Рассмотрим допустимое управление $u_2(t) \equiv -1$ при $t \in [0, 1]$. Тогда из (3.32) и (3.33) имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, & x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1, & \psi_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -t, \\ \dot{x}_2 = -t^2, \; x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 2t, \quad \psi_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -t, \\ x_2(t) = -\dfrac{t^3}{3}, \\ \psi_1(t) = t^2 - 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\psi_1(t) < 0$ при $t \in [0,\ 1]$, т.е. действительно из условия максимума следует, что $u = -1$. Критерий качества на данном управлении

$$J[u] = x_2(1) = -\frac{1}{3}.$$

3) Рассмотрим допустимое управление $u^p(t) = sign\cos\dfrac{2p+1}{2}\pi t,\ t \in [0,\ 1],\ p = 0,1,2,...$

Найдем моменты переключения управления:

$$\cos\frac{2p+1}{2}\pi t = 0 \Rightarrow \frac{2p+1}{2}\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow t_n = \frac{2n+1}{2p+1},\ n = \overline{0, p}.$$

а) $t \in [0,\ t_0)$, $u = 1$, тогда из (3.32) и (3.33) имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, & x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = t, \\ x_2(t) = -\dfrac{t^3}{3}, \\ \psi_1(t) = -t^2 + \psi_1(0), \end{cases}$$

где $\psi_1(0)$ найдем из условия $\psi_1(t_0) = 0$ (т.к. при $t = t_0$ происходит переключение управления):

$$-\frac{1}{(2p+1)^2} + \psi_1(0) = 0 \Rightarrow \psi_1(0) = \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

б) $t \in [t_{2m},\ t_{2m+1})$, $u = -1$, тогда из (3.32) и (3.33) имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -t + t_{2m} + x_1(t_{2m}), \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{3}(t - t_{2m} - x_1(t_{2m}))^3 + x_2(t_{2m}) - \dfrac{1}{3}x_1^3(t_{2m}), \\ \psi_1(t) = (t - t_{2m} - x_1(t_{2m}))^2 + \psi_1(t_{2m}) - x_1^2(t_{2m}), \end{cases}$$

так как в моменты $t = t_{2m}$ и $t = t_{2m+1}$ происходит переключение управления, то $\psi_1(t_{2m}) = 0$ и $\psi_1(t_{2m+1}) = 0$. Найдем $x_1(t_{2m})$:

$$(t_{2m+1} - t_{2m} - x_1(t_{2m}))^2 - x_1^2(t_{2m}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{2p+1} - x_1(t_{2m}) = x_1(t_{2m}) \;\Rightarrow\; x_1(t_{2m}) = \frac{1}{2p+1}.$$

Тогда $x_1(t_{2m+1}) = -\dfrac{1}{2p+1}$

$$x_2(t) = -\frac{1}{3}\left(t - \frac{4m+1}{2p+1} - \frac{1}{2p+1}\right)^3 + x_2(t_{2m}) - \frac{1}{3(2p+1)^3},$$

$$x_2(t_{2m+1}) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^3 + x_2(t_{2m}) - \frac{1}{3(2p+1)^3} = x_2(t_{2m}) - \frac{2}{3(2p+1)^3}.$$

в) $t \in [t_{2m+1},\, t_{2m+2})$, $u = 1$, тогда из (3.32) и (3.33) имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, \\ \dot{\psi}_1 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = t - t_{2m+1} - \dfrac{1}{2p+1}, \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{3}\left(t - t_{2m+1} - \dfrac{1}{2p+1}\right)^3 + x_2(t_{2m+1}) - \dfrac{1}{3(2p+1)^3}, \\ \psi_1(t) = -\left(t - t_{2m+1} - \dfrac{1}{2p+1}\right)^2 + \dfrac{1}{(2p+1)^2}. \end{cases}$$

Очевидно, $\psi_1(t_{2m+2}) = 0$. Так как $x_1(t_{2m+1}) = -\dfrac{1}{2p+1}$ и $\psi_1(t_{2m+1}) = 0$, то

$$x_2(t_{2m+2}) = -\frac{2}{3(2p+1)^3} + x_2(t_{2m+1}).$$

Так как $x_2(t_0) = -\dfrac{1}{3}$, то

$$x_2(1) = x_2(t_0) - \frac{2p}{3(2p+1)^3} = -\frac{1}{3(2p+1)^3} - \frac{2p}{3(2p+1)^3} = -\frac{2p+1}{3(2p+1)^3} = -\frac{1}{3(2p+1)^2}.$$

Следовательно, $J[u_p] = x_2(1) = -\dfrac{1}{3(2p+1)^2} \to 0$ при $p \to \infty$.

Данный пример показывает, что управление, удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина, вообще говоря, не является оптимальным.

4. Численные методы оптимального управления, основанные на принципе максимума

4.1. Метод игольчатой линеаризации

Принцип максимума является основой для построения сходящихся итерационных методов решения задач оптимального управления. Остановимся на одном из простейших вариантов таких методов.

Предположим, что в задаче оптимального управления

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U \subset R^m,$$
$$J[u] = \Phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)dt \to \min \tag{4.1}$$

известно некоторое начальное приближение – допустимое управление $u^0(t)$ и с помощью описываемой процедуры найдена функция $u^k(t)$. Опишем k-ю итерацию алгоритма.

1) Вычисляются соответствующие управлению $u^k(t)$ решения исходной и сопряженной задач – функции $x^k(t)$ и $\psi^k(t)$, а также значения функционала $J[u^k]$.

2) Составляется функция

$$W_k(v,t) = H(t,x^k(t),\psi^k(t),v) - H(t,x^k(t),\psi^k(t),u^k(t)),$$
$$v \in U,\ t \in [t_0,t_1], \text{ где } H(t,x,\psi,u) = \psi^T f(t,x,u) - F(t,x,u).$$

3) Для каждого фиксированного $t \in [t_0,t_1]$ решается вспомогательная задача математического программирования: находится управление $\overline{u}^k(t)$ из условия максимума по $v \in U$ функции $W_k(v,t)$:

$$\overline{u}^k(t): \overline{W}_k(t) = W_k(\overline{u}^k(t),t) = \max_{v \in U} W_k(v,t).$$

Если $\overline{W}_k(t) \equiv 0$, $t \in [t_0,t_1)$, то управление $u^k(t)$ удовлетворяет принципу максимума, и реализация метода прекращается.

4) Из решения задачи одномерной (глобальной) максимизации находится точка $\tau^k \in [t_0,t_1]$ такая, что

$$\overline{W}_k(\tau^k) = \max_{t \in [t_0,t_1]} \overline{W}_k(t).$$

Можно считать, что $\bar{W}_k(\tau^k) > 0$, поскольку, если $\bar{W}_k(\tau^k) = 0$, то для управления $u^k(t)$ принцип максимума выполнен.

5) Пусть t_0^k и t_1^k – ближайшие слева и справа к τ^k точки разрыва функции $\bar{W}_k(t)$. Строится однопараметрическое семейство множеств:

$$T_k(\varepsilon) = [\tau^k - \varepsilon(\tau^k - t_0), \tau^k + \varepsilon(t_1 - \tau^k)),\ \ \varepsilon \in [0,1]$$

и семейство управлений:

$$u_\varepsilon^k(t) = \begin{cases} \bar{u}^k(t), & t \in T_k(\varepsilon), \\ u^k(t), & t \in [t_0, t_1) \setminus T_k(\varepsilon). \end{cases}$$

6) Ищется ε_k из условия минимизации функционала:

$$J[u_{\varepsilon_k}^k] = \min_{\varepsilon \in [0,1]} J[u_\varepsilon^k]$$

и следующее приближение определяется формулой:

$$u^{k+1}(t) = u_{\varepsilon_k}^k(t)$$

На этом очередная k-я итерация метода завершается.

Замечание 4.1. Пусть в рассматриваемой задаче (4.1) выполнены предположения теоремы принципа максимума; множество U компактно; функционал $J[u]$ ограничен снизу на множестве допустимых управлений; вектор-функции $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ удовлетворяют условию Липшица по x с одной максимальной константой на всех допустимых наборах $\{u, x, \psi\}$; функция $\bar{W}(t) = \max\limits_{v \in U}[H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t))]$ удовлетворяет условию Липшица на всех допустимых процессах и на каждом интервале непрерывности с одной максимальной константой; расстояние между любыми точками разрыва функции $\bar{W}(t)$ для всех допустимых процессов не меньше некоторого положительного числа. Тогда генерируемая методом последовательность управлений строго релаксационна ($J[u^{k+1}(t)] < J[u^k(t)]$) и сходится в смысле $\lim\limits_{k \to \infty} \bar{W}_k(\tau^k) = 0$.

Пример 4.1. Выполнить одну итерацию изложенной выше процедуры в задаче:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \ |u(t)| \le 1, \ t \in [0,2], \quad J[u] = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)dt \to \min$$

с начальным приближением $u^0(t) \equiv 1$.

Функция Гамильтона имеет вид:

$$H = \psi u - \frac{x^2}{2},$$

сопряженная задача:

$$\dot{\psi} = x, \ \psi(2) = 0.$$

1) Найдем решения исходной и сопряженной систем, соответствующие управлению $u^0(t)$:

$$\dot{x} = 1, \ x(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad x^0(t) = t + 1;$$

$$\dot{\psi} = t + 1, \psi(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi^0(t) = \frac{t^2}{2} + t - 4$$

и значение функционала

$$J[u^0(t)] = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^0(t))^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t+1)^2 dt = \left.\frac{(t+1)^3}{6}\right|_0^2 = \frac{13}{3}.$$

2) Строим функцию

$$W_0(v,t) = \psi^0(t)v - \frac{1}{2}(x^0(t))^2 - \left[\psi^0(t)u^0(t) - \frac{1}{2}(x^0(t))^2\right] =$$

$$= \psi^0(t)\left[v - u^0(t)\right] = \left(\frac{t^2}{2} + t - 4\right)(v - 1).$$

3) Так как $\psi^0(t) = \dfrac{t^2}{2} + t - 4 < 0$ при $t \in [0,2)$, решением задачи максимизации функции $W_0(v,t)$ по v при каждом фиксированном $t \in [0,2)$ является

$$\bar{u}^0(t) = -1, \ t \in [0,2).$$

При этом $\bar{W}_0(t) = -2\left(\dfrac{t^2}{2} + t - 4\right) = -t^2 - 2t + 8 > 0$ при $t \in [0,2)$.

4) Так как функция $\bar{W}_0(t)$ на полуинтервале $[0,2)$ убывает $\left(\dot{\bar{W}}_0(t) = -2(t+1) < 0\right)$, то максимум функции $\bar{W}_0(t)$ на полуинтервале $[0,2)$ достигается в точке $\tau^0 = 0$.

5) Функция $\bar{W}_0(t)$ непрерывна на $[0,2)$. Поэтому $t_0^0 = 0$, $t_1^0 = 2$ и

$$T_0(\varepsilon) = \left[0 - \varepsilon(0-0),\ 0 + \varepsilon(2-0)\right) = [0, 2\varepsilon),$$

$$u_\varepsilon^0(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \le t < 2\varepsilon, \\ 1 & \text{при } 2\varepsilon \le t < 1, \end{cases} \qquad \varepsilon \in [0,1].$$

6) Вычислим ε из условия минимизации функционала $J[u_\varepsilon^0]$. Найдем для этого соответствующее управлению $u_\varepsilon^0(t)$ состояние $x_\varepsilon^0(t)$:

а) при $t \in [0,2\varepsilon)$: $\dot{x} = -1,\ x(0) = 1 \Rightarrow x(t) = 1 - t$ и при $t = 2\varepsilon$ получаем $x(2\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon$;

б) при $t \in [2\varepsilon, 2]$: $\dot{x} = 1,\ x(2\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon \Rightarrow x(t) = (t - 2\varepsilon) + 1 - 2\varepsilon = t + 1 - 4\varepsilon$.

Тогда

$$J[u_\varepsilon^0] = \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\varepsilon}(1-t)^2 dt + \int_{2\varepsilon}^{2}(t+1-4\varepsilon)^2 dt\right] = \frac{1}{6}\left[(t-1)^3\Big|_0^{2\varepsilon} + (t+1-4\varepsilon)^3\Big|_{2\varepsilon}^{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2\varepsilon-1)^3 + 1 + (3-4\varepsilon)^3 - (1-2\varepsilon)^3\right] = \frac{1}{6}\left[2(2\varepsilon-1)^3 + 1 + (3-4\varepsilon)^3\right] = \Phi_0(\varepsilon).$$

По теореме Вейерштрасса глобальный минимум непрерывной функции $\Phi_0(\varepsilon)$ на отрезке $[0,1]$ достигается. Точками глобального минимума могут являться либо корни алгебраического уравнения $\dfrac{d\Phi_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$, либо концы отрезка. Приравнивая нулю первую производную функции $\Phi_0(\varepsilon)$, получим уравнение

$$2(2\varepsilon-1)^2 - 2(3-4\varepsilon)^2 = 0 \Rightarrow (2\varepsilon-1)^2 = (3-4\varepsilon)^2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\varepsilon - 1 = 3 - 4\varepsilon, \\ 2\varepsilon - 1 = 4\varepsilon - 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varepsilon = \dfrac{2}{3}, \\ \varepsilon = 1. \end{array}\right.$$

Сравнивая значения $\Phi_0(0)=\frac{13}{3}$, $\Phi_0\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27}$, $\Phi_0(1)=\frac{1}{3}$, приходим к выводу о том, что точкой глобального минимума является $\varepsilon=\frac{2}{3}$. Следующее приближение имеет вид:

$$u^1(t)=\begin{cases}-1 & \text{при } 0\le t<\frac{4}{3},\\ 1 & \text{при } \frac{4}{3}\le t\le 2,\end{cases} \quad J[u^1(t)]=\Phi_0\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27}.$$

На этом одна итерация метода завершена. Интересна вторая итерация. Соответствующие управлению $u^1(t)$ состояние и решение сопряженной задачи:

$$x^1(t)=\begin{cases}1-t & \text{при } 0\le t\le\frac{4}{3},\\ t-\frac{5}{3} & \text{при } \frac{4}{3}\le t\le 2,\end{cases} \qquad \psi^1(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2}t^2+t-\frac{4}{9} & \text{при } 0\le t\le\frac{4}{3},\\ \frac{1}{2}t^2-\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} & \text{при } \frac{4}{3}\le t\le 2.\end{cases}$$

Вспомогательное управление

$$\bar{u}^1(t)=\begin{cases}-1 & \text{при } 0\le t\le\frac{2}{3},\\ 1 & \text{при } \frac{2}{3}\le t\le\frac{4}{3},\\ -1 & \text{при } \frac{4}{3}\le t\le 2.\end{cases}$$

Функция $\bar{W}_1(t)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\le t\le\frac{2}{3},\\ 2\psi^1(t) & \text{при } \frac{2}{3}\le t\le\frac{4}{3},\\ -2\psi^1(t) & \text{при } \frac{4}{3}\le t\le 2\end{cases}$ является непрерывной и достигает глобального максимума в двух точках $\tau^1=1$ и $\tilde{\tau}^1=\frac{5}{3}$. Решение задач одномерной минимизации по ε приводит для первой точки к управлению

$$\overline{u}^2(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \le t \le \dfrac{11}{12}, \\ 1 & \text{при } \dfrac{11}{12} \le t \le \dfrac{13}{12}, \\ -1 & \text{при } \dfrac{13}{12} \le t \le \dfrac{4}{3}, \\ 1 & \text{при } \dfrac{4}{3} \le t \le 2. \end{cases}$$

Используя в качестве точки τ^1 вторую точку $\tilde{\tau}^1 = \dfrac{5}{3}$ получим

$$\overline{u}^2(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ 1 & \text{при } 1 \le t \le \dfrac{4}{3}, \\ -1 & \text{при } \dfrac{4}{3} \le t \le \dfrac{9}{5}, \\ 1 & \text{при } \dfrac{9}{5} \le t \le 2. \end{cases}$$

Дальнейшая реализация алгоритма приводит к росту числа точек переключения управления на отрезке $[1,2]$ и "пилообразному" виду графика функции состояния на этом отрезке (значение целевого функционала на каждой итерации уменьшается). Это связано с тем, что на отрезке $[1,2]$ оптимальное управление является особым. Выяснив структуру возможного особого процесса, часто удается улучшить сходимость метода, выбрав соответствующим образом начальное приближение.

Рассмотрим другую <u>модификацию алгоритма</u>, использующего ту же идею. Пусть на k-м шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^k(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Найдем соответствующее ему решение исходной и сопряженной задач $x^k(t)$ и $\psi^k(t)$.

Найдем вспомогательное управление $\overline{u}_k(t)$ по правилу

$$\overline{u}^k(t) = \arg\max_{v \in U} W_k(v,t), \qquad t \in [t_0, t_1).$$

Составим функцию $\overline{W}_k(t) = W_k(\overline{u}^k(t), t) \ge 0$, $t \in [t_0, t_1)$.

Если $\overline{W}_k(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1)$, то управление $u^k(t)$ удовлетворяет принципу максимума, и реализация метода прекращается.

Определим крайние значения этой функции

$$\lambda_{\min} = \inf_{t\in[t_0,t_1)} \overline{W}_k(t), \qquad \lambda_{\max} = \sup_{t\in[t_0,t_1)} \overline{W}_k(t),$$

Построим λ-параметрическое семейство управлений:

$$u_\lambda^k(t) = \begin{cases} u^k(t), & \overline{W}_k(t) < \lambda, \\ \overline{u}^k(t), & \overline{W}_k(t) \ge \lambda, \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1).$$

Тогда очередное ($k+1$)-е приближение задачи одномерной оптимизации определяется из условия

$$J[u_\lambda^k] \to \min, \qquad \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}].$$

Пример 4.2. В задаче

$$\dot{x} = u\,,\ x(0) = -2\,,\ |u| \le 2\,,\ J[u] = 3x(2) + \int_0^2 x(t)(u(t)+3)dt \to \min$$

провести одну итерацию метода для управления $u^0(t) = 1$.

Выпишем функцию Понтрягина

$$H(t,x,\psi,u) = \psi u - x(u+3)$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi} = u+3, \quad \psi(2) = -3\,.$$

Найдем решение исходного уравнения, соответствующее управлению $u^0(t)$:

$$\dot{x} = 1, \quad x(0) = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x^0(t) = t-2, \quad t \in [0,2]$$

и сопряженную траекторию:

$$\dot{\psi} = 4, \quad \psi(2) = -3 \qquad \Rightarrow \qquad \psi^0(t) = 4t - 11, \quad t \in [0,2].$$

Составим функцию

$$\begin{aligned} W_0(v,t) &= \psi^0(t)\,v - x^0(t)(v+3) - (\psi^0(t)u^0(t) - x^0(t)(u^0(t)+3)) = \\ &= (\psi^0(t) - x^0(t))(v - u^0(t)) = 3(t-3)(v-1), \quad t \in [0,2]. \end{aligned}$$

Отсюда максимум функции $W_0(v,t)$ при $|v| \le 2$ достигается в точке -2, так как $(t-3) < 0$ при $t \in [0,2)$.

Таким образом, $\overline{u}^0(t) \equiv -2$, $t \in [0,2)$, при этом функция $\overline{W}_0(t) = W_0(\overline{u}^0(t),t)$ имеет вид $\overline{W}_0(t) = 27 - 9t$.

Отметим, что $\overline{W}_0(t) > 0$, $0 \le t \le 2$. Следовательно, управление $u^0(t)$ не удовлетворяет принципу максимума.

Найдем крайние значения функции $\overline{W}_0(t)$:

$$\lambda_{\min} = 9, \quad \lambda_{\max} = 27$$

и образуем λ-параметрическое семейство:

$$u_\lambda^0(t) = \begin{cases} 1, & \bar{W}_0(t) < \lambda, \\ -2, & \bar{W}_0(t) \ge \lambda, \end{cases}$$

при $\lambda \in [9, 27]$, $t \in [0, 2]$.

Следовательно,

$$u_\lambda^0(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t < \tau(\lambda), \\ 1, & \tau(\lambda) \le t \le 2, \end{cases}$$

где $\tau(\lambda) \in [0, 2]$ – единственный корень уравнения $\bar{W}_0(t) = \lambda$ на $[0, 2]$. Понятно, что в данном случае имеет место взаимно-однозначное соответствие $\lambda \Leftrightarrow \tau(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, $\tau(\lambda) \in [0, 2]$ (функция $\bar{W}_0(t)$ монотонно убывает на $[0; 2]$). Поэтому имеется возможность от параметра λ перейти к параметру τ и образовать τ-параметрическое семейство управлений

$$u_\tau^0(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t < \tau, \\ 1, & \tau \le t \le 2, \end{cases}$$

где $\tau \in [0, 2]$. При этом следующее приближение определяется по правилу

$$u^1(t) = u_{\tau_0}^0(t), \quad t \in [0,2],$$

где τ_0 – решение задачи $J[u_\tau^0] \to \min$, $\tau \in [0,2]$.

Найдем явное представление для функционала $J[u_\tau^0]$ через параметр τ. С этой целью подсчитаем траекторию $x_\tau^0(t) = x(t, u_\tau^0)$, $t \in [0,2]$.

Решая задачу Коши на отрезке $[0, \tau]$

$$\dot{x} = -2, \quad x(0) = -2,$$

определим траекторию

$$x_\tau^0(t) = -2t - 2, \quad 0 \le t \le \tau .$$

Далее интегрируем уравнение $\dot{x} = 1$, $x(\tau) = -2\tau - 2$. В результате получим

$$x_\tau^0(t) = t - 3\tau - 2, \quad \tau \le t \le 2 .$$

Подсчитаем функционал

$$J[u_\tau^0] = 3x_\tau^0(2) + \int_0^2 x_\tau^0(t)(u_\tau^0(t)+3)dt =$$

$$= -9\tau - 2\int_0^\tau (t+1)dt + 4\int_\tau^2 (t - 3\tau - 2)dt = 9\tau^2 - 27\tau - 8.$$

Решим задачу параметрического поиска

$$9\tau^2 - 27\tau - 8 \to \min, \quad \tau \in [0,2].$$

Это задача минимизации выпуклой функции на отрезке. Найдем стационарную точку

$$18\tau - 27 = 0.$$

Отсюда, $\tau_0 = 3/2$. Следовательно,

$$u^1(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t < 3/2, \\ 1, & 3/2 \le t \le 2, \end{cases}$$

Заметим, что при такой модификации алгоритма могут возникнуть трудности с задачей параметрической оптимизации, если функция $\overline{W}_k(t) > 0$ имеет участки постоянного значения: $\overline{W}_k(t) \equiv const$, $t \in T_k \subset [t_0, t_1]$, $mes\, T_k > 0$. Тогда в эти участки надо вписывать однопараметрическое семейство множеств $T_k(\varepsilon)$.

Предложенные алгоритмы построения итерационных процессов принципа максимума называются методами игольчатой линеаризации.

4.2. Градиентные методы

Пусть в задаче оптимального управления (4.1) выполнены условия теоремы принципа максимума и, кроме того, функции $f(t,x,u)$ и $F(t,x,u)$ дифференцируемы по u, а множество U выпукло. В этом случае на оптимальном процессе $u(t)$, $x(t)$ справедлив дифференциальный принцип максимума:

$$u(t) = \arg\max_{v \in V} \frac{\partial H^T(t, x(t), \psi(t), u(t))}{\partial u} v, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Опишем методы последовательных приближений, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума.

Методы используют информацию о градиенте $\frac{\partial H}{\partial u}$ функции Гамильтона и применяются, фактически, для решения конечномерных задач максимизации гамильтониана в точках отрезка $[t_0, t_1]$.

4.2.1.Метод условного градиента

Пусть на k-м шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^k(t)$ с соответствующими решениями основной и сопряженной задач $x^k(t)$ и $\psi^k(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Определим вспомогательное управление $\overline{u}^k(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, как решение задачи

$$\overline{u}^k(t) = \arg\max_{v \in V} \frac{\partial H^T(t, x^k(t), \psi^k(t), u^k(t))}{\partial u} v.$$

Подсчитаем величину

$$\delta_1(u^k) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H^T(t, x^k(t), \psi^k(t), u^k(t))}{\partial u} (\overline{u}^k(t) - u^k(t)) dt \geq 0 .$$

Если $\delta_1(u^k) = 0$, то управление $u^k(t)$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума.

Рассмотрим основной случай: $\delta_1(u^k) > 0$. Образуем α-параметрическое семейство управлений (выпуклую комбинацию управлений u^k и $\overline{u}^k$)

$$u_\alpha^k(t) = u^k(t) + \alpha(\overline{u}^k(t) - u^k(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \ \alpha \in [0, 1].$$

Тогда, очередное $(k+1)$-е приближение ищется в виде

$$u^{k+1}(t) = u_{\alpha_k}^k(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где α_k – решение задачи одномерного поиска

$$J[u_\alpha^k] \to \min, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Пример 4.3.

$$J[u] = -\frac{1}{2} x(2) + \int_0^2 (x^2(t) - u^2(t)) dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad | u(t) | \leq 1.$$

Провести одну итерацию метода условного градиента для управления

$$u^0(t) \equiv 0, \quad t \in [0, 2].$$

Составим функцию Гамильтона

$$H = \psi u - x^2 + u^2$$

и найдем ее производную по управлению

$$H_u = \psi + 2u.$$

Образуем сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = 2x, \quad \psi(2) = \frac{1}{2}.$$

Найдем фазовую и сопряженную траектории

$$x^0(t) = 0, \quad \psi^0(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in [0,2].$$

Сформируем вспомогательное управление

$$\overline{u}^0 = \arg\max_{|v|\le 1}(v/2) = 1, \quad t \in [0,2].$$

Подсчитаем величину

$$\delta_1(u^0) = \frac{1}{2}\int_0^2 dt = 1 > 0.$$

Определим α-параметрическое семейство управлений:

$$u_\alpha^0 = \alpha, \quad \alpha \in [0,1], \; t \in [0,2].$$

Тогда $u^1(t) = u_{\alpha_0}^0(t) = \alpha_0$, где значение α_0 является решением задачи

$$J[u_\alpha^0] \to \min, \quad \alpha \in [0,1].$$

Найдем представление для функционала $J[u_\alpha^0]$. С этой целью решим задачу Коши

$$\dot{x} = \alpha, \quad x(0) = 0.$$

Ее решение имеет вид $x_\alpha^0(t) = \alpha t$, $t \in [0,2]$. Тогда

$$J[u_\alpha^0] = -\frac{1}{2}x_\alpha^0(2) + \int_0^2 [(x_\alpha^0(t))^2 - (u_\alpha^0(t))^2]dt =$$

$$= -\alpha + \int_0^2 (\alpha^2 t^2 - a^2)dt = \frac{2}{3}\alpha^2 - \alpha.$$

Сформируем задачу параметрического поиска

$$\frac{2}{3}\alpha^2 - \alpha \to \min, \quad \alpha \in [0,1].$$

Это задача минимизации выпуклой функции на отрезке. Найдем стационарную точку

$$\frac{4}{3}\alpha - 1 = 0.$$

Отсюда, $\alpha_0 = 3/4$, $u^1(t) \equiv 3/4$, $t \in [0,2]$.

4.2.2. Метод проекции градиента

Пусть на k-м шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^k(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $k = 0, 1, \ldots$ Найдем соответствующие решения $x^k(t)$ и $\psi^k(t), t \in [t_0, t_1]$ исходной и сопряженной задач. Образуем вспомогательное управление $\overline{u}^k(t)$ по правилу

$$\overline{u}^k(t) = P_U(u(t) + H_u(t, x^k(t), \psi^k(t), u^k(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Здесь P_U – оператор проецирования на множество U в евклидовой метрике. Подсчитаем величину

$$\delta_1(u^k) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H^T(t, x^k(t), \psi^k(t), u^k(t))}{\partial u}(\overline{u}^k(t) - u^k(t))dt \geq 0.$$

Если $\delta_1(u^k) = 0$, то управление u^k удовлетворяет дифференциальному принципу максимума. В этом случае метод прекращает свою работу.

Пусть $\delta_1(u^k) > 0$. Сформируем α-параметрическое семейство управлений:

$$u_\alpha^k(t) = u^k(t) + \alpha(\overline{u}^k(t) - u^k(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \ \alpha \in [0,1].$$

Очередное $(k+1)$-е приближение определим следующим образом:

$$u^{k+1}(t) = u_{\alpha_k}^k(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где параметр α_k является решением задачи одномерной оптимизации

$$J[u_\alpha^k] \to \min, \quad \alpha \in [0,1].$$

Пример 4.4. В задаче

$$\dot{x} = -u, \qquad x(0) = 1, \qquad |u(t)| \leq 1,$$

$$J[u] = -2x(1) - \int_0^1 x(t)(3u(t) + 1)dt \to \min,$$

провести одну итерацию метода проекции градиента для управления $u^0(t) = 0$, $t \in [0,1]$.

Функция Гамильтона в данном случае имеет вид

$$H=-\psi u+3xu+x,$$

причем $H_u=3x-\psi$. Запишем сопряженную задачу

$$\dot{\psi}=-3u-1, \qquad \psi(1)=2.$$

Найдем фазовую и сопряженную траектории, соответствующие управлению u^0:

$$x^0(t)=1, \qquad \psi^0(t)=3-t, \qquad t\in[0,1].$$

Сформируем задачу поиска вспомогательного управления

$$\overline{u}^0=P_{|u|\le 1}(t), \qquad t\in[0,1].$$

Тогда $\overline{u}^0(t)=t$. Подсчитаем величину

$$\delta_1(u^0)=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}>0.$$

Образуем α-параметрическое семейство управлений:

$$u_\alpha^0=\alpha t, \qquad 0\le\alpha\le 1, \quad t\in[0,1].$$

При этом следующее приближение определяется по правилу

$$u^1(t)=u_{\alpha_0}^0(t)=\alpha_0 t, \qquad t\in[0,1],$$

где α_0 – решение задачи $J[u_\alpha^0]\to\min$, $0\le\alpha\le 1$.

Найдем явное представление для функционала $J[u_\alpha^0]$ через параметр α. С этой целью подсчитаем траекторию $x_\alpha^0(t)$, $t\in[0,1]$, решая задачу Коши

$$\dot{x}=-\alpha t, \qquad x(0)=1.$$

Тогда, $x_\alpha^0(t)=1-\dfrac{1}{2}\alpha t^2$. В результате получаем

$$J[u_\alpha^0]=-2x_\alpha^0(1)-\int_0^1 x_\alpha^0(t)(3u_\alpha^0(t)+1)dt=$$

$$=\alpha-2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}\alpha t^2\right)(3\alpha t+1)dt=\frac{2}{8}\alpha^2-\frac{1}{3}\alpha-3.$$

Решаем задачу на поиск параметра α_0:

$$\frac{3}{8}\alpha^2-\frac{1}{3}\alpha-3\to\min, \qquad \alpha\in[0,1].$$

Отсюда, $\alpha_0=4/9$. Запишем итоговый ответ: $u^1(t)=\dfrac{4}{9}t$, $t\in[0,1]$.

5. Задачи терминального управления с нефиксированной продолжительностью

Рассмотрим задачу управления, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x,u) \quad \text{с начальным условием} \quad x(t_0) = x_0, \tag{5.1}$$

$$\text{ограничением на управление} \quad u(t) \in U \quad \text{и}$$

$$\text{критерием качества} \quad J[u,t_0,t_1] = \Phi(x(t_1),t_0,t_1) \to \min. \tag{5.2}$$

Пусть выполнены все условия теоремы 3.1 и, кроме того, функция $\Phi(x,\tau,t)$ непрерывно-дифференцируема по своим аргументам. Минимизация в (5.2) проводится по u, t_0, t_1.

Если оптимальные значения t_0^0, t_1^0 известны, тогда $u^0(t)$ – оптимальное управление в простейшей задаче оптимального управления и, следовательно, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Таким образом, необходимо получить условия для нахождения t_0^0 и t_1^0.

4.1. Продолжительность процесса ограничена снизу ($t_0 \le b$, $t_1 \ge c$)

Начнем с получения необходимых условий на левом конце.

Для оптимального значения t_0^0 возможны два случая:

а) $t_0^0 = b$ и б) $t_0^0 < b$.

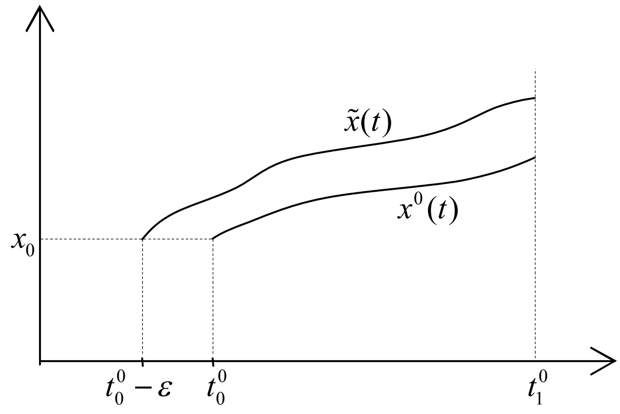
Рассмотрим случай а). Так как продолжительность процесса ограничена снизу, то будем сравнивать процесс $x^0(t)$, $t \in [t_0^0, t_1^0]$ с процессами $x(t)$, $t \in [t_0, t_1^0]$, $t_0 = t_0^0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Введем вспомогательное управление

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u^0(t_0^0) & \text{при } t \in [t_0^0 - \varepsilon, t_0^0), \\ u^0(t) & \text{при } t \in [t_0^0, t_1^0). \end{cases}$$

Пусть $\tilde{x}(t)$ – траектория системы (5.1), соответствующая управлению $\tilde{u}(t)$ и удовлетворяющая начальному условию

$$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}(t_0^0 - \varepsilon) = x_0.$$



Вычислим приращение критерия качества при переходе от траектории $x^0(t)$ к траектории $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned}\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0] &= \Phi(\tilde{x}(t_1^0),t_0^0-\varepsilon,t_1^0)-\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)= \\ &= \underbrace{\frac{\partial\Phi^T(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial x}(\tilde{x}(t_1^0)-x^0(t_1^0))}_{=-\psi^{0T}(t_1^0)\delta x(t_1^0)}+ \\ &+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}(-\varepsilon)+o\left(\left\|\Delta x^0(t_1^0)\right\|,\varepsilon\right).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Процессы $x^0(t)$ и $\tilde{x}(t)$ определены на промежутке $[t_0^0,t_1^0]$, но находятся в разных состояниях в момент t_0^0:

$$x^0(t_0^0)=x^0, \qquad \tilde{x}(t_0^0)=x_0+\varepsilon f(t_0^0,x_0,u^0(t_0^0))+o(\varepsilon). \tag{5.4}$$

Таким образом, $\Delta x(t_0^0)=\tilde{x}(t_0^0)-x^0(t_0^0)$ имеет порядок ε, а значит в силу замечания 3.1 ко второму этапу доказательства теоремы 3.1 $\Delta x(t_1^0)$ тоже имеет порядок ε.

Формула приращения функционала в простейшей задаче оптимального управления (замечание 3.2 к теореме 3.1)

$$\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0]=-\psi^{0T}(t_0^0)\delta x(t_0^0)-\int_{t_0^0}^{t_1^0}[H(t,x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))-H(t,x(t),\psi(t),u(t))]dt-$$

$$-\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\varepsilon+o(\varepsilon)=$$

$$=-\psi^{0T}(t_0^0)(f(t_0^0,x^0(t_0^0),u^0(t_0^0))\varepsilon+o(\varepsilon))-\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\varepsilon+o(\varepsilon)=$$

$$=-\psi^{0T}(t_0^0)f(t_0^0,x^0(t_0^0),u^0(t_0^0))\varepsilon-\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\varepsilon+o(\varepsilon)=$$

$$= -\left[H(t_0^0, x^0(t_0^0), \psi^0(t_0^0), u^0(t_0^0)) + \frac{\partial \Phi(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0)}{\partial \tau} \right] \varepsilon + o(\varepsilon). \tag{5.5}$$

Так как $\Delta J[u^0, t_0^0, t_1^0] \geq 0$, то из (5.5) следует, что

$$H(t_0^0, x^0(t_0^0), \psi^0(t_0^0), u^0(t_0^0)) + \frac{\partial \Phi(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0)}{\partial \tau} \leq 0 \tag{5.6}$$

Таким образом, получено необходимое условие для левого конца.

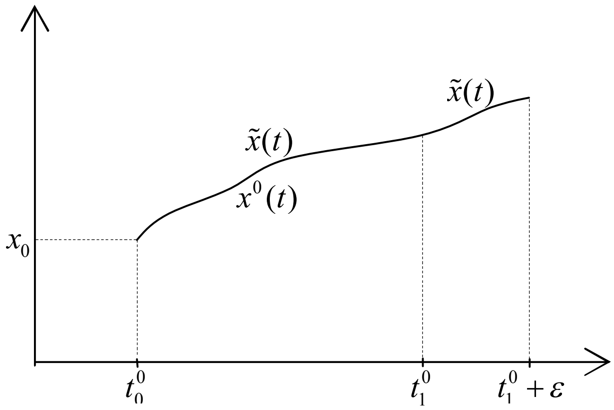
Случай $t_0^0 < b$ рассмотрим позже.

Рассмотрим правый конец траектории. Возможны два случая:

а) $t_1^0 = c$ и б) $t_1^0 > c$.

Начнем с рассмотрения случая а). Введем вспомогательное управление

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u^0(t) & \text{при} \quad t \in [t_0^0, t_1^0), \\ u^0(t_1^0 - 0) & \text{при} \quad t \in [t_1^0, t_1^0 + \varepsilon]. \end{cases}$$



Оптимальность $u^0(t)$, t_1^0 означает, что при всех $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\Delta J[u^0, t_0^0, t_1^0] = \Phi(\tilde{x}(t_1^0 + \varepsilon), t_0^0, t_1^0 + \varepsilon) - \Phi(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0) \geq 0. \tag{5.7}$$

Распишем приращение критерия качества ΔJ:

$$\Delta J[u^0, t_0^0, t_1^0] = \frac{\partial \Phi^T(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0)}{\partial x} (\tilde{x}(t_1^0 + \varepsilon) - x^0(t_1^0)) + \frac{\partial \Phi(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0)}{\partial t} \varepsilon +$$
$$+ o(\| \tilde{x}(t_1^0 + \varepsilon) - x^0(t_1^0) \|, \varepsilon).$$

Согласно уравнению (5.1) имеем

$$\tilde{x}(t_1^0 + \varepsilon) - x^0(t_1^0) = \varepsilon f(t_1^0, x^0(t_1^0), u^0(t_1^0 - 0)) + o(\varepsilon),$$

тогда

$$\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0]=\left[\underbrace{\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial x}}_{=-\psi^{0T}(t_1^0)} f(t_1^0,x^0(t_1^0),u^0(t_1^0-0))+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial t}\right]\varepsilon+o(\varepsilon)$$

или

$$\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0]=\left[-H(t_1^0,x^0(t_1^0),\psi^0(t_1^0),u^0(t_1^0-0))+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial t}\right]\varepsilon+o(\varepsilon).\quad(5.8)$$

Так как $\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0]\ge 0$, то

$$-H(t_1^0,x^0(t_1^0),\psi^0(t_1^0),u^0(t_1^0-0))+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial t}\ge 0 \qquad (5.9)$$

Таким образом, получено необходимое условие для правого конца.

Случай $t_1^0>c$ рассмотрим позже.

4.2. Продолжительность процесса ограничена сверху ($t_0\ge b$, $t_1\le c$)

Начнем с получения необходимых условий на левом конце.

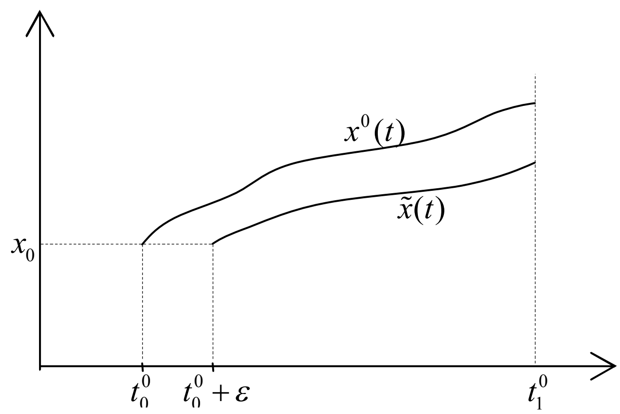
Возможны два случая:

а) $t_0^0=b$ и б) $t_0^0>b$.

Рассмотрим первый вариант. Введем управление

$$\tilde u(t)=u^0(t) \text{ при } t\in[t_0^0+\varepsilon,t_1^0]$$

и пусть $\tilde x(t)$ – соответствующая ему траектория, $\tilde x(t_0^0+\varepsilon)=x_0$.



Найдем приращение критерия качества при переходе от процесса $x^0(t)$ к процессу $\tilde x(t)$:

$$\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0]=\Phi(\tilde{x}(t_1^0),t_0^0+\varepsilon,t_1^0)-\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)=$$

$$=\underbrace{\frac{\partial\Phi^T(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial x}(\tilde{x}(t_1^0)-x^0(t_1^0))}_{=-\psi^{0T}(t_1^0)\delta x(t_1^0)}+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\varepsilon+o(\|\Delta x(t_1^0)\|,\varepsilon).$$

Процессы $x^0(t)$ и $\tilde{x}(t)$ имеют общий отрезок определения $[t_0^0+\varepsilon,t_1^0]$, а в точке $t_0^0+\varepsilon$ у них разные начальные условия

$$\begin{aligned}&x^0(t_0^0+\varepsilon)=x_0+\varepsilon f(t_0^0,x_0,u^0(t_0^0))+o(\varepsilon),\\&\tilde{x}(t_0^0+\varepsilon)=x_0.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Применяя формулу приращения критерия качества из замечания 3.2 к теореме 3.1 на отрезке $[t_0^0+\varepsilon,t_1^0]$ и используя (5.10), получим

$$\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0]=-\psi^T(t_0^0+\varepsilon)\delta x(t_0^0+\varepsilon)-\int\limits_{t_0^0+\varepsilon}^{t_1^0}[H(t,x(t),\psi(t),\tilde{u}(t))-H(t,x(t),\psi(t),u(t))]dt+$$

$$+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\varepsilon+o(\varepsilon)=$$

$$=-\psi^{0T}(t_0^0+\varepsilon)(-f(t_0^0+\varepsilon,x^0(t_0^0+\varepsilon),u^0(t_0^0+\varepsilon))\varepsilon+o(\varepsilon))+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\varepsilon+o(\varepsilon)=$$

$$=\psi^{0T}(t_0^0+\varepsilon)f(t_0^0+\varepsilon,x^0(t_0^0+\varepsilon),u^0(t_0^0+\varepsilon))\varepsilon+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\varepsilon+o(\varepsilon)=$$

$$=\psi^{0T}(t_0^0)f(t_0^0,x^0(t_0^0),u^0(t_0^0))\varepsilon+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\varepsilon+o(\varepsilon)=$$

$$\Delta J=\left[H(t_0^0,x^0(t_0^0),\psi^0(t_0^0),u^0(t_0^0))+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\right]\varepsilon+o(\varepsilon).$$

Так как $\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0]\geq 0$, то в силу произвольности ε получим

$$H(t_0^0,x^0(t_0^0),\psi^0(t_0^0),u^0(t_0^0))+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial\tau}\geq 0.\tag{5.11}$$

Случай $t_0^0>b$ рассмотрим позже.

Получим необходимые условия на правом конце. Возможны два случая: а) $t_1^0=c$ и б) $t_1^0<c$.

В случае $t_1^0=c$ определим управление $\tilde{u}(t)=u(t)$ при $t\in[t_0^0,t_1^0-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Аналогично предыдущему

$$\Delta J[u^0,t_0^0,t_1^0] = -\left[-H(t_1^0, x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0 - 0)) + \frac{\partial \Phi(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0)}{\partial t} \right] \varepsilon + o(\varepsilon) \geq 0,$$

откуда следует, что

$$-H(t_1^0, x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0 - 0)) + \frac{\partial \Phi(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0)}{\partial t} \leq 0. \quad (5.12)$$

Случай $t_1^0 < c$ рассмотрим позже.

4.3. Процессы без ограничения на продолжительность

Пусть t_0^0 и t_1^0 – найденные оптимальные значения. Рассмотрим определение условий на левом конце:

а) пусть $t_0 \leq b = t_0^0$, тогда оптимальным является t_0^0, так как оно является допустимым значением. Следовательно, выполняется (5.6);

б) пусть $t_0 \geq b = t_0^0$, тогда аналогично выполняется условие (5.11). Отсюда следует, что

$$H(t_0^0, x^0(t_0^0), \psi^0(t_0^0), u^0(t_0^0)) + \frac{\partial \Phi(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0)}{\partial \tau} = 0. \quad (5.13)$$

Рассуждая аналогично для правого конца, получим

$$-H(t_1^0, x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0 - 0)) + \frac{\partial \Phi(x^0(t_1^0), t_0^0, t_1^0)}{\partial t} = 0 \quad (5.14)$$

или другими словами $\dfrac{\partial J[u^0,t_0^0,t_1^0]}{\partial t_0} = 0$ и $\dfrac{\partial J[u^0,t_0^0,t_1^0]}{\partial t_1} = 0$. Сюда же относятся случаи б) из пунктов I и II.

Частные случаи:

1) $J = \Phi(x(t_1))$, т.е. функционал явно не зависит от t_0 и t_1, тогда из (5.13) и (5.14) следует, что $H\big|_{t=t_0^0} = 0$, $H\big|_{t=t_1^0} = 0$.

2) $\dot{x} = f(x,u)$, т.е. система стационарна. Тогда функция Гамильтона постоянна на экстремальной траектории и в случае 1) тождественно равна 0.

Пример 4.1. Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 3\sqrt{2},$$

где $u \in \mathbb{R}, t \in [0,t_1], t_1 -$ не задано, и критерием качества

$$J[u,t_1]=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(t)dt+\frac{1}{2}(t_1-1)^2+\frac{1}{2}x^2(t_1)\to\min.$$

1) Составим функцию Гамильтона:

$$H=\psi u-u^2$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi}=0,\quad \psi(t_1)=-x(t_1).$$

2) Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума $\frac{\partial H}{\partial u}=\psi-u=0.$ Отсюда $u(t)=\psi(t).$ Найденное управление обеспечивает максимум функции H по управлению, так как выполняются достаточные условия экстремума $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=-1<0.$

3) Запишем необходимые условия на правом конце:

$$-H(t_1^0,x^0(t_1^0),\psi^0(t_1^0),u^0(t_1^0-0))+\frac{\partial\Phi(x^0(t_1^0),t_0^0,t_1^0)}{\partial t}=0$$

или

$$-\left(\psi(t_1)u(t_1)-\frac{1}{2}u^2(t_1)\right)+(t_1-1)=0\quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}\psi^2(t_1)+t_1-1=0.$$

4) Решаем краевую задачу:

$$\begin{cases}\dot{x}=\psi, & x(0)=3\sqrt{2},\\ \dot{\psi}=0, & \psi(t_1)=-x(t_1)\end{cases}$$

при условии $-\frac{1}{2}\psi^2(t_1)+t_1-1=0.$

Отсюда $\psi(t)\equiv C_1,\quad x(t)=C_1t+3\sqrt{2}.$

Тогда $\psi(t_1)=C_1=-x(t_1)=-C_1t_1-3\sqrt{2}.$

Решаем систему:

$$\begin{cases} C_1 = -C_1 t_1 - 3\sqrt{2}, \\ -\dfrac{1}{2}C_1^2 + t_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(t_1+1) = -3\sqrt{2}, \\ t_1 - 1 - \dfrac{1}{2}C_1^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{t_1+1}, \\ t_1 - 1 = \dfrac{9}{(t_1+1)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{t_1+1}, \\ t_1^3 + t_1^2 - t_1 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{t_1+1}, \\ (t_1-2)(t_1^2+3t_1+5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2, \\ C_1 = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

В результате получаем: $t_1^0 = 2, \quad u(t) = -\sqrt{2}, \quad x(t) = -\sqrt{2}t + 3\sqrt{2}.$

Пример 4.2. Рассмотрим систему управления, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = 2u_2^2, \end{cases} \text{ с начальными условиями } \begin{cases} x_1(5) = 0, \\ x_2(5) = \dfrac{33}{32} \end{cases}$$

и ограничением на управление $|u_1| \le 1, u_2 \in \mathbb{R}.$

Критерий качества $J[u, t_1] = x_1(t_1) + 2x_2(t_1) \to \min, \quad t_1$ не задано.

1) Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \psi_1(x_2 + u_1 + u_2) + 2\psi_2 u_2^2.$$

Найдем управления u_1 и u_2 из условия максимума функции Гамильтона:

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, \text{если } \psi_1(t) > 0, \\ -1, \text{если } \psi_1(t) < 0, \\ [-1,1], \text{если } \psi_1(t) = 0, \end{cases}$$

$$u_2: \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial u_2} = \psi_1 + 4\psi_2 u_2 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} = 4\psi_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow u_2(t) = -\frac{\psi_1}{4\psi_2}, \psi_2 < 0.$$

2) Составим сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \\ \psi_1(t_1) = -1, \quad \psi_2(t_1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1(t) \equiv -1, \\ \psi_2(t) = t - 2 - t_1. \end{cases}$$

Так как $\psi_1(t) < 0,$ то $u_1(t) \equiv -1$ и $u_2(t) = \dfrac{1}{4(t-2-t_1)}.$

3) Момент t_1 определим из условия

$$H\,|_{t=t_1} = -\left(x_2(t_1) - 1 + \frac{1}{4(t_1-2-t_1)}\right) + 2(t_1-2-t_1)\frac{1}{16(t_1-2-t_1)^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-x_2(t_1) + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(t_1) = \frac{17}{16}.$$

4) Рассмотрим исходную систему

$$\dot{x}_2 = 2u_2^2 = \frac{1}{8(t-2-t_1)^2} \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = -\frac{1}{8(t-2-t_1)} + C.$$

Определим постоянные C и t_1 из условий $x_2(5) = \dfrac{33}{32}, x_2(t_1) = \dfrac{17}{16}$:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{8(3-t_1)} + C = \dfrac{33}{32}, \\ -\dfrac{1}{8(t_1-2-t_1)} + C = \dfrac{17}{16} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 7, \\ C = 1, \end{cases}$$

т.е. $x_2(t) = -\dfrac{1}{8(t-9)} + 1.$ Найдем $x_1(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 + u_2, \\ x_1(5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{8(t-9)} + 1 - 1 + \dfrac{1}{4(t-9)}, \\ x_1(5) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{8}\ln|t-9| + C, \\ x_1(5) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{8}\ln\frac{1}{4}|t-9|.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{4}|t-9|, \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{8(t-9)} + 1, \end{cases} \quad u_1(t) \equiv -1, \quad u_2(t) = \frac{1}{4(t-9)}.$$

6. Задача оптимального управления с подвижными концами

Пусть движение управляемого объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U, \\ &x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.1. Задача быстродействия с подвижным правым концом

Предположим, что левый конец траектории закреплен

$$x(t_0) \in M_0 = \{x_0\}, \tag{6.2}$$

а на правый конец наложены ограничения типа неравенств, т.е.

$$x(t_1) \in M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi(x) \le 0\}, \tag{6.3}$$

где $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно-дифференцируемая функция.

Необходимо перевести систему с множества M_0 на множество M_1 за наименьшее время, т.е. необходимо минимизировать t_1.

Покажем, что решение данной задачи можно свести к рассмотренному ранее. Логично предполагать, что $x_0 \notin M_1$. Это означает, что $\varphi(x_0) > 0$. В противном случае, $t_1 = t_0$ и задача не имеет смысла.

Предположим, что t_1^0 – оптимальное по быстродействию время, $x^0(t)$, $u^0(t)$, $\psi^0(t)$ – оптимальные траектория, управление и решение сопряженной системы соответственно.

Так как t_1^0 – оптимальное по быстродействию время, то

$$x^0(t_1^0) \in M_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x^0(t_1^0)) \le 0,$$

а при $t_1 < t_1^0$ выполняется условие

$$x(t_1) \notin M_1 \quad \text{для любого} \quad u(t) \in U,$$

т.е.

$$\varphi(x(t_1)) > 0 \quad \text{для любого} \quad u(t) \in U,\ t_1 < t_1^0. \tag{6.4}$$

В противном случае t_1^0 не оптимально.

Следовательно, исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

$$\text{минимизировать } \varphi(x(t_1)) \text{ при условии } t_1 \le t_1^0 \text{ и } u(t) \in U. \tag{6.5}$$

Очевидно, что в силу непрерывности траектории $x(t)$ и функции $\varphi(x)$ минимум в (6.5) достигается, а в силу (6.4) данный минимум равен 0.

Задача (6.1), (6.2), (6.3), (6.5) является задачей оптимального управления с нефиксированной продолжительностью процесса, ограниченной сверху значением t_1^0.

Полученная задача была рассмотрена ранее, для нее получено необходимое условие оптимальности:

Теорема 6.1. Пусть система (6.1) удовлетворяет условиям теоремы принципа максимума Понтрягина, функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема, t_1^0 – оптимальное время быстродействия, $u^0(t)$ – оптимальное управление, $x^0(t)$ – оптимальная траектория, $\psi^0(t)$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(t, x^0(t), \psi, u^0(t))}{\partial x},$$

где $H(t, x, \psi, u) = \psi^T f(t, x, u)$ – функция Гамильтона.

Тогда t_1^0, $u^0(t)$, $x^0(t)$ $\psi^0(t)$ удовлетворяют:

1) условию максимума

$$H(t, x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^0(t), \psi^0(t), u) \quad \text{для всех} \quad t \in [t_0^0, t_1^0); \tag{6.6}$$

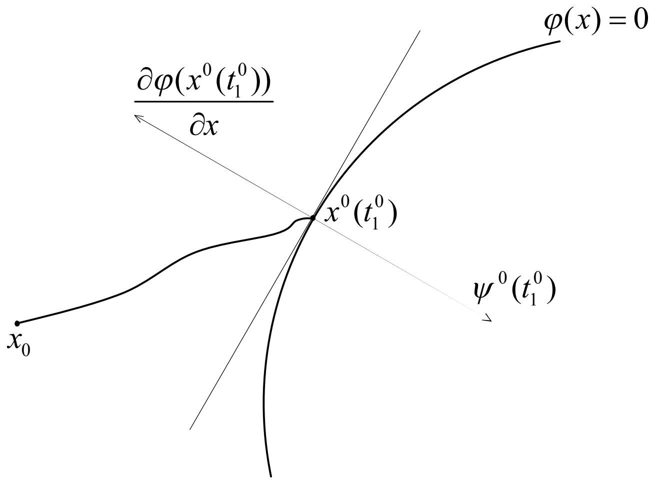
2) условию трансверсальности на правом конце

$$\psi^0(t_1^0) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1^0))}{\partial x}; \tag{6.7}$$

3) неравенству

$$H(t_1^0, x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0)) \geq 0. \tag{6.8}$$

Из (6.7) следует, что вектор $\psi^0(t_1^0)$ перпендикулярен касательной гиперплоскости к M_1 в точке $x^0(t_1^0)$.



6.2. Задача быстродействия с закрепленными концами

Рассмотрим систему (6.1) при условии, что

$$x(t_0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1. \tag{6.9}$$

Необходимо перевести систему из множества $M_0=\{x_0\}$ на множество $M_1=\{x_1\}$ за наименьшее время.

Рассмотрим множество $\tilde{M}_1=S_\varepsilon(x_1)$, $\varepsilon>0$ – шар радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке x_1:

$$(x-x_1)^2\le\varepsilon^2 \quad\Rightarrow\quad \underbrace{(x-x_1)^2-\varepsilon^2}_{=\varphi(x)}\le 0. \tag{6.10}$$

Таким образом, задача сведена к предыдущей. Устремляя $\varepsilon\to 0$, получим исходную задачу, при этом

$$\psi^0(t_1^0)=c, \quad \|c\|=1.$$

Пример 6.1. Решить задачу синтеза: перевести объект вдоль траектории системы

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=u\end{cases}$$

из произвольного начального положения $x(0)=x_0$ в начало координат $x(t_1)=0$ при ограничениях на управление $|u|\le 1$ за наименьшее время.

Составим функцию Гамильтона $H=\psi_1x_2+\psi_2u$ и сопряженную систему

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1=0,\\ \dot{\psi}_2=-\psi_1\end{cases} \text{ с граничными условиями } \begin{cases}\psi_1(t_1)=c_1,\\ \psi_2(t_1)=c_2\end{cases} \text{ где } c_1^2+c_2^2=1.$$

Решение сопряженной системы имеет вид

$$\psi_1(t)\equiv c_1,\quad \psi_2(t)=-c_1(t-t_1)+c_2.$$

Управление найдем из условия максимума

$$\psi_1(t)x_2(t)+\psi_2(t)u(t)=\max_{u\in U}(\psi_1(t)x_2(t)+\psi_2(t)u)\quad\Rightarrow$$

$$\psi_2(t)u(t)=\max_{u\in U}\psi_2(t)u\quad\Rightarrow\quad u(t)=\begin{cases}1, & \text{если } \psi_2(t)>0,\\ -1, & \text{если } \psi_2(t)<0,\\ [-1,1], & \text{если } \psi_2(t)=0.\end{cases}$$

Так как функция $\psi_2(t)$ линейна, она обращается в нуль на промежутке $[0,t_1]$ максимум в одной точке. Таким образом, оптимальное управление принимает значения ± 1, причем переключений не может быть более одного. Кроме того, так как изменение значения управления в одной точке не повлияет на траекторию, будем считать, что в точке переключения управление непрерывно справа.

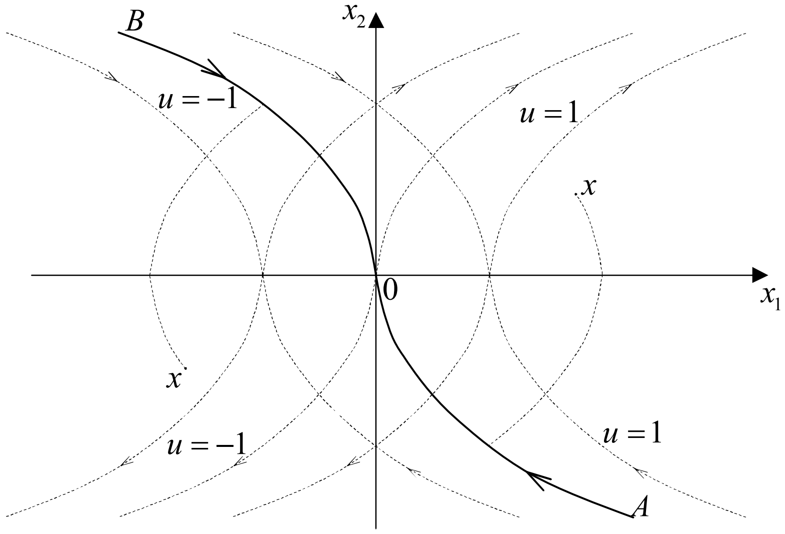
Пусть $u\equiv 1$, тогда система примет вид

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1(t)=\dfrac{1}{2}t^2+x_{20}t+x_{10},\\ x_2(t)=t+x_{20}.\end{cases}\tag{6.11}$$

Исключим переменную t: $t=x_2-x_{20}\quad\Rightarrow$

$$x_1=\frac{(x_2-x_{20})^2}{2}+x_{20}(x_2-x_{20})+x_{10}\qquad\text{или}\qquad x_1=\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_{20}^2}{2}+x_{10}.$$

Таким образом, фазовыми траекториями являются параболы, причем из (6.11) следует, что при увеличении времени x_2 также увеличивается (см. рисунок).



Аналогично при $u \equiv -1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}, \\ x_2(t) = -t + x_{20}. \end{cases}$$

Исключим переменную t: $t = x_{20} - x_2 \Rightarrow$

$$x_1 = -\frac{(x_{20} - x_2)^2}{2} + x_{20}(x_{20} - x_2) + x_{10} \quad \text{или} \quad x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_{20}^2}{2} + x_{10}.$$

Таким образом, фазовыми траекториями являются параболы, причем из (6.11) следует, что при увеличении времени x_2 уменьшается.

Очевидно, что управление имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in BO \text{ или } x \text{ выше } BOA, \\ 1, & \text{если } x \in AO \text{ или } x \text{ ниже } BOA, \end{cases}$$

т.е. управление найдено как функция состояния системы.

6.3. Общая задача оптимального управления с подвижными концами

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \; t_0 \le t \le t_1 \tag{6.12}$$

с ограничениями на концах в виде неравенств

$$\varphi_i^0(x(t_0)) \le 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{6.13}$$

$$\varphi_j^1(x(t_1)) \le 0, \quad j = \overline{1, k}, \tag{6.14}$$

и критерием качества

$$J[u] = \Phi(x(t_1)) \to \min. \tag{6.15}$$

Моменты t_0 и t_1 считаются фиксированными.

Предположим, что оптимальное решение $u_0(t)$, $x_0(t)$ существует, функции f, Φ удовлетворяют условиям принципа максимума Понтрягина, φ_i^0, $i = \overline{1, m}$ и φ_j^1, $j = \overline{1, k}$ непрерывно-дифференцируемы.

Тогда существуют множители Лагранжа $\lambda_i \geq 0\,, i = \overline{1,m}\,,\quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i > 0$ и $\mu_j \geq 0,\ j = \overline{0,k}\,,\quad \sum_{j=0}^{k} \mu_j > 0$ такие, что оптимальное управление $u_0(t)$, оптимальная траектория $x_0(t)$ и решение $\psi_0(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(t, x_0(t), \psi, u_0(t))}{\partial x},$$

где $H(t,x,\psi,u) = \psi^T f(t,x,u)$ – функция Гамильтона, удовлетворяют условиям:

1) условие максимума

$$H(t, x_0(t), \psi_0(t), u_0(t)) = \max_{u \in U} H(t, x_0(t), \psi_0(t), u) \quad \text{при любом} \quad t \in [t_0, t_1]\,; \qquad (6.16)$$

2) условия трансверсальности

$$\begin{aligned} \psi_0(t_0) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i^0(x_0(t_0))}{\partial x}, \\ \psi_0(t_1) &= -\sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{\partial \varphi_j^1(x_0(t_1))}{\partial x} - \mu_0 \frac{\partial \Phi(x_0(t_1))}{\partial x}; \end{aligned} \qquad (6.17)$$

3)

$$\begin{aligned} &\lambda_i \varphi_i^0(x_0(t_0)) = 0, \quad i = \overline{1,m} \quad \text{условие нежесткости,} \\ &\mu_j \varphi_j^1(x_0(t_1)) = 0, \quad j = \overline{1,k} \quad \text{условие дополняющей нежесткости.} \end{aligned} \qquad (6.18)$$

7. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим линейный процесс, описываемый линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t). \tag{7.1}$$

Предположим, что коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям:

1) $A(t) - n \times n$ матрица, $B(t) - n \times m$ матрица, $f(t) - n$-мерный вектор-столбец, все они действительны и измеримы на всей оси времени t;

2) нормы $\|A(t)\|, \|B(t)\|, \|f(t)\|$ интегрируемы (по Лебегу) на любом компактном подмножестве оси t;

3) управление $u(t)$ является действительным, измеримым, m- мерным вектором, определенным на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, принимающем значения из компактного множества $U \subset \mathbb{R}^m$ (в дальнейшем такие управления будем считать допустимыми).

Наша задача заключается в том, чтобы выбрать управление $u(t)$ так, чтобы соответствующая траектория $x(t)$ переводила бы систему из начального состояния x_0 в некоторое желаемое конечное состояние в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 7.1 (теорема Каратеодори). Пусть функция $u(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $I \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого начального значения $x(t_0) = x_0, t_0 \in I$ абсолютно непрерывное решение $x(t)$ уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + f(t)$$

существует, является единственным и для любого $t \in I$ задается формулой Коши

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\left[B(s)u(s) + f(s)\right]ds,$$

где $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x,$$

удовлетворяющая условию $\Phi(t_0) = E$.

Если $A(t) \equiv A$ - постоянная матрица, то $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$, где

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)} = E + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n(t-t_0)^n}{n!} + \ldots \quad -$$

экспоненциал матрицы $A(t-t_0)$.

7.1. Множество достижимости

Рассмотрим линейную систему (7.1). Для заданного начального состояния изучим множество $K(t_1)$ точек пространства $\mathbb{R}^n$, в которое x_0 может быть переведена с помощью управления $u(t)\in U$ на $t\in[t_0,t_1]$.

Определение 7.1. Множеством достижимости $K(t)$ в момент времени t назовем множество всех точек фазового пространства $\mathbb{R}^n$, в которые можно перейти на отрезке времени $[t_0,t]$ из точки x_0 по решениям системы (7.1) при всех возможных управлениях $u(t)\in U$.

Теорема 7.2. Множество достижимости $K(t_1)$ является выпуклым компактом и непрерывно зависит от t_1 при $t_1\ge t_0$.

Доказательство. По определению

$$K(t_1)=\left\{\Phi(t_1)x_0+\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)\big[B(s)u(s)+f(s)\big]ds : u(s)\in U\right\}=$$

$$=\left\{\Phi(t_1)x_0+\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)f(s)ds+\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds, u(s)\in U\right\}.$$

Суммой множеств F и G из пространства $\mathbb{R}^n$ назовем множество $F+G=\{f+g, f\in F, g\in G\}$. Тогда

$$K(t_1)=\left\{\Phi(t_1)x_0+\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right\}+\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)B(s)Uds,$$

где

$$\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)B(s)Uds=\left\{\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds, u(s)\in U\right\}. \qquad (7.2)$$

В силу теоремы А.А.Ляпунова множество (7.2) является выпуклым компактом, а множество $K(t_1)$ получается из него сдвигом на вектор

$$\Phi(t_1)x_0+\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)f(s)ds,$$

следовательно, также является выпуклым компактом.

Для доказательства непрерывной зависимости множества $K(t_1)$ от t_1 нужно показать, что для любой точки $x_1 \in K(t_1)$ найдется точка $x_2 \in K(t_2)$ такая, что $\|x_2 - x_1\| < \varepsilon$, где ε - наперед заданное положительное число, $|t_2 - t_1| < \delta(\varepsilon)$, и наоборот.

В силу определения множества $K(t)$ существует допустимое управление $u(t)$, переводящее точку x_0 в точку x_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$, т.е.

$$x_1 = \Phi(t_1)x_0 + \Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + f(s)]ds .$$

В качестве точки x_2 выберем

$$x_2 = \Phi(t_2)x_0 + \Phi(t_2)\int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + f(s)]ds,$$

причем $x_2 \in K(t_2)$ по определению множества достижимости.

Оценим

$$\|x_2 - x_1\| \le \|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\| \cdot \|x_0\| + \left\| \Phi(t_2)\int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + f(s)]ds - \right.$$

$$\left. -\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + f(s)]ds \right\| \le \|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\| \cdot \|x_0\| +$$

$$+\|\Phi(t_2)\| \cdot \left| \int_{t_1}^{t_2} \|\Phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + f(s)]\| ds \right| +$$

$$+\|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\| \cdot \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + f(s)]\| ds.$$

В силу предположений относительно коэффициентов системы (7.1) правая часть может быть сделана меньше ε за счет уменьшения $t_2 - t_1$.

7.2. Экстремальные траектории

Определение 7.2. Пусть $u(t) \in U, t_0 \le t \le t_1$ - управление линейной системы (7.1), x_0 - начальное состояние в момент t_0. Если конечная точка $x(t_1)$ соответствующего решения $x(t)$ лежит на границе $\partial K(t_1)$ множества достижимости $K(t_1)$, то $u(t)$ называется экстремальным управлением, а $x(t)$ - экстремальной траекторией на отрезке $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 7.3. Управление $u(t), t \in [t_0, t_1]$ является экстремальным тогда и только тогда, когда существует нетривиальное решение $\psi(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi \tag{7.3}$$

такое, что для почти всех $t \in \left[t_0, t_1\right]$ имеет место равенство

$$\psi^T(t)B(t)u(t) = \max_{u \in U} \psi^T(t)B(t)u. \tag{7.4}$$

<u>Доказательство</u>. Отметим, что каждое решение системы (7.3) имеет вид

$$\psi(t) = \left(\Phi^{-1}(t)\right)^T \psi_0.$$

Эту формулу для $\psi(t)$ легко проверить непосредственной подстановкой $\psi(t)$ в систему (7.3):

$$\dot{\psi}(t) = \left(\dot{\Phi}^{-1}(t)\right)^T \psi_0 = \left(-\Phi^{-1}(t)\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)\right)^T \psi_0 =$$

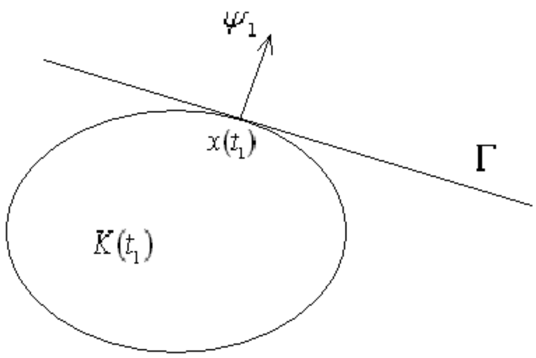
$$= \left(-\Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)\right)^T \psi_0 = -A^T(t)\left(\Phi^{-1}(t)\right)^T \psi_0 = -A^T(t)\psi(t),$$

$$\psi(t_0) = \psi_0.$$

<u>Необходимость.</u> Предположим, что $u(t),, t \in [t_0, t_1] -$экстремальное управление и, следовательно, $u(t)$ переводит точку x_0 в $x(t_1) \in \partial K(t_1)$ по траектории

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)\left[B(s)u(s) + f(s)\right]ds.$$

Поскольку $K(t_1)$ - выпуклый компакт в силу теоремы 7.2, то существует гиперплоскость Γ, опорная для $K(t_1)$, в точке $x(t_1)$. Пусть ψ_1 - единичный вектор внешней нормали к гиперплоскости Γ в точке $x(t_1)$. Тогда



$$\psi_1^T x \le \psi_1^T x(t_1) \tag{7.5}$$

для всех $x \in K(t_1)$.

Определим нетривиальное решение $\psi(t) = \left(\Phi^{-1}(t)\right)^T \psi_0$ сопряженной системы (7.3), в момент времени t_1 совпадающее с ψ_1. Для этого параметр ψ_0 найдем из условия

$$\psi_1 = \psi(t_1) = \left(\Phi^{-1}(t_1)\right)^T \psi_0.$$

Транспонируя, получаем $\psi_1^T = \psi_0{}^T \Phi^{-1}(t_1),$ откуда домножением справа на невырожденную матрицу $\Phi(t_1)$, имеем

$$\psi_1^T \Phi(t_1) = \psi_0^T \Rightarrow \psi_0 = \Phi^T(t_1)\psi_1.$$

Покажем, что для найденного решения сопряженной системы (7.3) выполняется условие (7.4). Предположим противное:

$$\psi^T(t)B(t)\tilde{u}(t) < \max_{u \in U} \psi^T(t)B(t)u \tag{7.6}$$

на некотором промежутке $I_0 \subset [t_0, t_1], mesI_0 > 0$.

Определим управление $\tilde{u}(t) \in U$ на $[t_0, t_1]$ так, чтобы выполнялось соотношение (7.4): для почти всех $t \in [t_0, t_1]$

$$\psi^T(t)B(t)\tilde{u}(t) = \max_{u \in U} \psi^T(t)B(t)u. \tag{7.7}$$

Вектор-функция $\tilde{u}(t)$ измерима. Для управления $\tilde{u}(t)$ определим траекторию $\tilde{x}(t)$ системы (7.1) формулой Коши:

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)\left[B(s)\tilde{u}(s) + f(s)\right]ds.$$

Тогда

$$\psi_1^T \tilde{x}(t) = \psi_1^T \Phi(t)x_0 + \psi_1^T \Phi(t)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)\left[B(s)\tilde{u}(s) + f(s)\right]ds =$$

$$= \psi_1^T \Phi(t_1)x_0 + \psi_o^T \Phi^{-1}(t_1)\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)B(s)\tilde{u}(s)ds + \psi_1^T \Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)f(s)ds =$$

$$= \psi_1^T \Phi(t_1)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \psi_o^T \Phi^{-1}(s)B(s)\tilde{u}(s)ds + \psi_1^T \Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)f(s)ds >$$

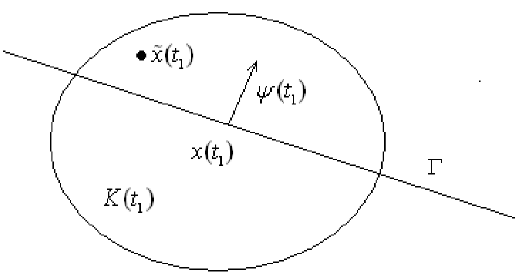
$$> \psi_1^T \Phi(t_1)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \psi^T(s)B(s)\tilde{u}(s)ds + \psi_1^T \Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)f(s)ds = \psi_1^T x(t_1).$$

Таким образом, $\psi_1^T \tilde{x}(t_1) > \psi_1^T x(t_1)$. По построению $\tilde{x}(t_1) \in K(t_1)$, а значит, получили противоречие с (7.5).

<u>Достаточность.</u> Предположим, что для некоторого нетривиального решения $\psi(t)$ сопряженной системы (7.3) управление $u(t) \in U$ удовлетворяет условию (7.4) почти всюду на $[t_0, t_1]$. Требуется показать, что

соответствующая траектория $x(t)$ оканчивается в граничной точке множества $K(t_1)$.

Предположим противное, т.е. $x(t_1)$ - внутренняя точка $K(t_1)$. Через точку $x(t_1)$ проведем гиперплоскость Γ с нормальным вектором $\psi(t_1)$. Тогда существует точка $\tilde{x}(t_1) \in K(t_1)$, лежащая в положительном полупространстве, определенном данной гиперплоскостью, т.е.



$$\psi^T(t_1)\tilde{x}(t_1) > \psi^T(t_1)x(t_1). \tag{7.8}$$

Пусть $\tilde{u}(t) \in U$ - управление, которому соответствует траектория $\tilde{x}(t)$. Тогда аналогично первой части теоремы

$$\psi^T\tilde{x}(t_1) = \psi^T(t_1)\Phi(t_1)x_0 + \int_{t_0}^{t_1}\psi^T(s)B(s)\tilde{u}(s)ds + \psi^T(t_1)\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)f(s)ds \leq$$

$$\leq \psi^T(t_1)\Phi(t_1)x_0 + \int_{t_0}^{t_1}\max_{u\in U}\psi^T(s)B(s)uds + \psi^T(t_1)\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)f(s)ds =$$

$$= \psi^T(t_1)\Phi(t_1)x_0 + \int_{t_0}^{t_1}\psi^T(s)B(s)u(s)ds + \psi^T(t_1)\Phi(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)f(s)ds = \psi^T(t_1)x(t_1).$$

Получим противоречие с неравенством (7.8). Теорема доказана.

Замечание 7.1. Определение 7.2 экстремальных управления и траектории не противоречит введенному ранее определению, так как условие (7.4) совпадает с условием максимума в принципе максимума Понтрягина в виду того, что функция Гамильтона имеет вид

$$H(t,x,\psi,u) = \psi^T(A(t)x + B(t)u + f(t))$$

и от u зависит лишь слагаемое $\psi^T B(t)u$.

Следствие 7.1. Пусть $u(t) \in U, t \in [t_0,t_1]$ - экстремальное управление системы (1), $x(t)$ - соответствующая ему траектория. Тогда $u(t)$ и $x(t)$ являются экстремальными на любом промежутке $[t_0,\tau]$, где $\tau \in (t_0,t_1)$. Другими словами, если $x(t_1) \in \partial K(t_1)$, то $x(\tau) \in \partial K(\tau)$ для любого $\tau \in [t_0,t_1]$.

Доказательство. В силу теоремы 7.3 управление $u(t)$ является экстремальным на отрезке $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда существует ненулевое решение сопряженной системы (7.3) такое, что равенство (7.4) справедливо для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Следовательно, для любого $\tau \in [t_0, t_1]$ равенство (7.4) справедливо для почти всех $t \in [t_0, \tau]$, а значит в силу теоремы 7.3 управление $u(t)$ является экстремальным на отрезке $[t_0, \tau]$.

Следствие 7.2. Пусть $K(t)$- множество достижимости системы (7.1). Если для некоторого момента $\tau \in [t_0, t_1]$ множество $K(t)$ имеет непустую внутренность (является телесным), то множество $K(t)$ будет иметь непустую внутренность для всех $t \in [\tau, t_1]$.

Доказательство. Пусть $x(t), t \in [t_0, t_1]$ является траекторией системы, точка $x(\tau)$ которой принадлежит внутренности множества $K(\tau)$. Если бы множество $K(t)$ при некотором $t \in (\tau, t_1)$ имело пустую внутренность, то точка $x(t)$ была бы граничной точкой множества $K(t)$, а значит, траектория $x(t)$ была бы экстремальной на $[t_0, t]$. Тогда в силу следствия 7.1 $x(t)$ была бы экстремальной на $[t_0, \tau]$, т.е. $x(\tau)$ лежала бы на границе множества $K(\tau)$. Поэтому $x(t)$ на отрезке $[\tau, t_1]$ должна быть внутренней точкой множества $K(t)$.

Определение 7.3. Задача (7.1) называется нормальной, если любые два управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, переводящие точку x_0 в одну и ту же граничную точку $P_1 \in \partial K(t_1)$ совпадает почти всюду.

Теорема 7.4. Система (7.1) является нормальной тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие единственности: для каждого нетривиального решения $\psi(t)$ и для любых двух управлений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, удовлетворяющих условию

$$\psi^T(t)B(t)u_1(t) = \psi^T(t)B(t)u_2(t) = \max_{u \in U} \psi^T(t)B(t)u$$

почти всюду, управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ совпадают почти всюду.

Если задача является нормальной и U содержит более одной точки, то множество достижимости $K(t_1)$ будет строго выпуклым компактным множеством с непустой внутренностью.

Следствие 7.3. Если задача (7.1) нормальна на $[t_0, t_1]$, то она нормальна на $[t_0, \tau]$, где $\tau \in [t_0, t_1]$.

7.3. Управляемость

Рассмотрим автономную линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{7.9}$$

с действительными постоянными $n \times n$ матрицей A и $n \times m$ матрицей B. Мы не будем накладывать никаких ограничений на управление, т.е. ограничивающим множеством U будем считать все пространство $\mathbb{R}^m$.

Наша задача: перевести систему из произвольной исходной точки x_0 в произвольную желаемую точку за конечный промежуток времени.

Так как для автономной системы имеет значение лишь разность $t_1 - t_0$ (а не значения t_0 и t_1) отдельно, мы будем для определенности полагать $t_0 = 0$.

Определение 7.4. Автономная линейная система (7.9) с $U = \mathbb{R}^m$ называется вполне управляемой в случае, если для любой пары точек x_0 и x_1 из $\mathbb{R}^n$ существует ограниченное измеримое управление $u(t)$ на некотором конечном промежутке $0 \le t \le t_1$, переводящее систему из точки x_0 в точку x_1.

Теорема 7.5. Автономная линейная система (7.9) явлется управляемой тогда и только тогда, когда ранг $n \times nm$ матрицы

$$[B, AB, ..., A^{n-1}B]$$

равен n.

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что система (7.9) вполне управляема, т.е. ее можно перевести из точки x_0 в произвольную точку x_1 из $\mathbb{R}^n$. Предположим, что при этом, вопреки предположению теоремы

$$rank[B, AB, ..., A^{n-1}B] < n.$$

Тогда строки матрицы линейно зависимы и существует ненулевой вектор v такой, что

$$v^T [B, AB, ..., A^{n-1}B] = 0$$

или

$$v^T B = 0, \quad v^T AB = 0, ..., v^T A^{n-1} B = 0. \tag{7.10}$$

Пусть $\lambda^n = c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n$ – характеристическое уравнение матрицы A. Тогда по теореме Гамильтона – Келли матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$A^n = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + ... + c_{n-1}A + c_n E. \tag{7.11}$$

Умножим (7.11) на вектор v^T слева и матрицу B справа:

$$v^T A^n B = c_1 \underbrace{v^T A^{n-1} B}_{\substack{\parallel \\ 0}} + c_2 \underbrace{v^T A^{n-2} B}_{\substack{\parallel \\ 0}} + ... + c_{n-1} \underbrace{v^T AB}_{\substack{\parallel \\ 0}} + c_n \underbrace{v^T B}_{\substack{\parallel \\ 0}}.$$

Следовательно, $v^T A^n B = 0.$

Умножим (7.11) на матрицу A, затем на вектор v^T слева и матрицу B справа:

$$v^T A^{n+1} B = c_1 \underbrace{v^T A^n B}_{\substack{\parallel \\ 0}} + c_2 \underbrace{v^T A^{n-1} B}_{\substack{\parallel \\ 0}} + ... + c_{n-1} \underbrace{v^T A^2 B}_{\substack{\parallel \\ 0}} + c_n \underbrace{v^T AB}_{\substack{\parallel \\ 0}} = 0$$

и т.д. По индукции получим

$$v^T A^{n+k} B = 0 \quad \text{для любого} \quad k = 0,1,2,... \tag{7.12}$$

Запишем решение линейной системы (7.9), исходящее из точки $x_0 = 0$ и соответствующее управлению $u(t)$ с помощью формулы Коши:

$$x(t) = e^{At}\int_0^t e^{-As} Bu(s)ds = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)ds.$$

Поэтому

$$v^T x(t) = \int_0^t v^T e^{A(t-s)} Bu(s)ds =$$

$$= \int_0^t v^T \left[E + A(t-s) + \frac{A^2(t-s)^2}{2!} + ... + \frac{A^n(t-s)^n}{n!} + ... \right] Bu(s)ds =$$

$$= \int_0^t \underbrace{\left[v^T B + v^T AB(t-s) + v^T A^2 B\frac{(t-s)^2}{2!} + ... + v^T A^n B\frac{(t-s)^n}{n!} + ... \right]}_{=0 \text{ в силу (7.10) и (7.12)}} u(s)ds = 0.$$

Таким образом, $v^T x(t) = 0$ для любого допустимого управления $u(t)$. Следовательно, все траектории $x(t)$ должны находиться на гиперплоскости, ортогональной вектору v. Однако это противоречит предположению об управляемости системы (7.9).

Отсюда заключаем, что ранг матрицы $[B, AB, ..., A^{n-1}B]$ равен n.

Достаточность. Предположим, что ранг матрицы $[B, AB, ..., A^{n-1}B]$ равен n. Докажем, что система (7.9) управляема.

Пусть K_0^1 – совокупность всех точек, в которые система может быть переведена из начала координат за промежуток времени $t \in [0,1]$ с помощью управлений, удовлетворяющих условиям $|u_i| \leq 1, i = \overline{1,m}.$ Тогда в силу теоремы 7.2 множество K_0^1 будет компактным и выпуклым.

Очевидно, что K_0^1 – симметричное относительно начала координат множество, так как если $x(1) \in K_0^1$ (соответствует управлению $u(t)$), то и $(-x(1)) \in K_0^1$ (соответствует управлению $(-u(t))$).

Кроме того, $0 \in K_0^1$ (соответствует управлению $u(t) \equiv 0$).

Покажем, что множество K_0^1 является телесным. Предположим противное, тогда множество K_0^1 лежит в некоторой гиперплоскости, проходящей через начало координат. Пусть v – нормальный вектор данной гиперплоскости. Тогда $v^T x(1) = 0$ или в силу формулы Коши

$$v^T \int_0^1 e^{A(1-s)} Bu(s)ds = 0$$

для всех описанных выше управлений. Следовательно,

$$\int_0^1 v^T e^{A(1-s)} Bu(s)ds = 0.$$

В силу леммы Лагранжа получим

$$v^T e^{A(1-s)} B = 0 \quad \text{для всех} \quad s \in [0,1]. \qquad (7.13)$$

При $s = 1$ имеем $v^T B = 0.$ Далее, дифференцируя равенство (7.13) по s и снова полагая $s = 1,$ получаем

$$v^T AB = 0.$$

Продолжая этот процесс, выводим следующую цепочку равенств:

$$v^T B = 0, \quad v^T AB = 0, ..., v^T A^{n-1} B = 0.$$

Но это означает, что строки матрицы $[B, AB, ..., A^{n-1}B]$ линейно зависимы, что противоречит нашему предположению. Следовательно, множество K_0^1 является телесным.

Очевидно, что $0 \in \operatorname{int} K_0^1$ в силу симметричности, выпуклости и телесности.

Если рассматривать управления, ограниченные условиями $|u_i| \le l$, где $l = 1, 2, \ldots,$ то соответствующие множества K_0^1 заменяются на lK_0^1. Таким образом, множество достижимости $K_0(1)$, соответствующее точке $x_0 = 0$, если не накладывать никаких ограничений на управление, будет представлять собой все пространство $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь в качестве начальной точки произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда множество достижимости имеет вид

$$K(1) = \{e^A x_0\} + K_0(1),$$

т.е. снова совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$. Таким образом, система (7.9) управляема.

Теорема доказана.

Пример 7.1. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

Матрицы A и B имеют вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Так как $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то

$$rank \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 = n,$$

и в силу теоремы система является вполне управляемой.

Пример 7.2. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

Очевидно, что система является явно не управляемой, так как $x_1(t)$ всегда лежит на кривой $x_1 = e^t x_1(0)$, т.е. управление влияет лишь на вторую координату. Воспользуемся теоремой: матрицы A и B имеют вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Так как $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то

$$rank\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 < n,$$

т.е. система не управляема.

7.4. Наблюдаемость

Рассмотрим автономную линейную систему (7.9), где $u \in \mathbb{R}^m$ − входной сигнал или вектор управления, а $x \in \mathbb{R}^n$ − решение или вектор состояния системы. Может случиться, что лишь некоторые из составляющих вектора состояния или линейная комбинация его компонент имеет физический смысл, или вообще наблюдаемы. В этом случае описание системы дополняется уравнением наблюдения

$$w = Hx, \tag{7.14}$$

где H − действительная постоянная $r \times n$ матица, определяющая наблюдаемый выход системы - r − мерный вектор w, зависящий от n − мерного вектора состояния x.

Определение 7.5. Система (7.9), (7.14) называется наблюдаемой, если по известным $w(t)$ и $u(t)$ можно восстановить $x(t_0)$ (а значит, и $x(t)$).

Теорема 7.6. Система (7.9), (7.14) наблюдаема тогда и только тогда, когда двойственная система

$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x + H^T v, \\ w = B^T x \end{cases}$$

управляема, а это будет тогда и только тогда, когда

$$rank[H^T, A^T H^T, \ldots, \left(A^T\right)^{n-1} H^T] = n.$$

7.5. Сравнение линейного и нелинейного случаев

Таким образом, для линейных систем множество достижимости $K(t_1)$ − выпуклый компакт и управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума тогда и только тогда, когда оно экстремально, причем $x(t_1) \in K(t_1)$. Для нелинейных систем множество достижимости может уже не быть выпуклым компактом и принцип максимума еще не гарантирует, что траектория $x(t)$ заканчивается на границе множества достижимости.

Пример 7.3. Рассмотрим задачу терминального управления, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = yu - xv, \\ \dot{y} = -xu - yv \end{cases}$$

с ограничениями на управления $|u| \le 1, |v| \le 1,$ начальной точкой $x(0) = 1, y(0) = 0$ и критерием качества $J[u] = -y(\pi) \to \min$.

Перейдем к полярной системе координат путем замены $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$:

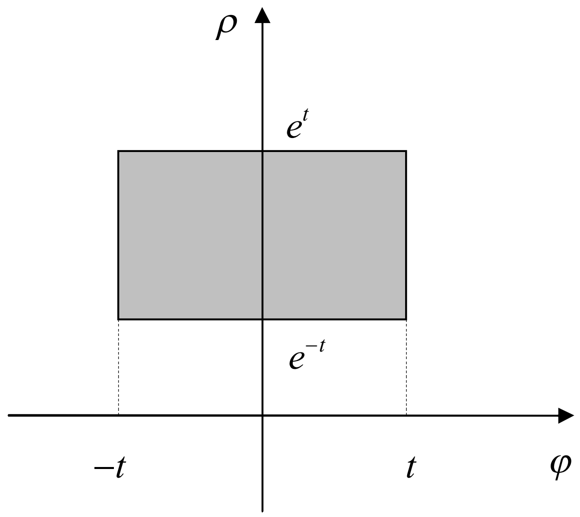
$$\begin{cases} \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = \rho u\sin\varphi - \rho v\cos\varphi, \\ \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = -\rho u\cos\varphi - \rho v\sin\varphi. \end{cases}$$

Разрешим систему относительно $\dot{\rho}$ и $\dot{\varphi}$:

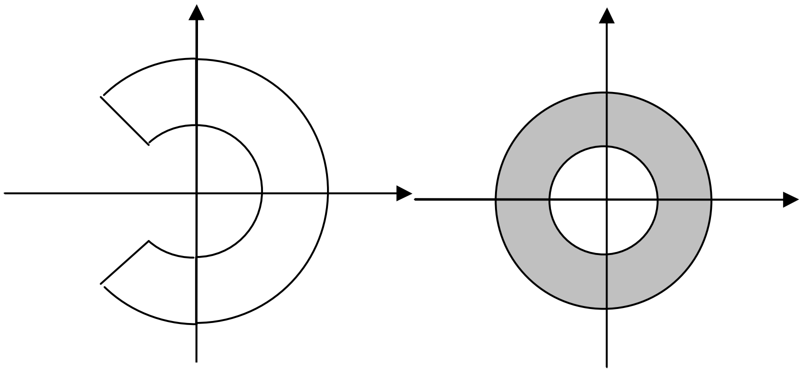
$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\rho v, \\ \rho\dot{\varphi} = -\rho u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = -\rho v, \\ \dot{\varphi} = -u. \end{cases}$$

Начальной точкой является $\rho_0 = 1, \varphi_0 = 0$. Изучим поведение системы в интервале времени $t \in [0, \pi]$. Управляющие функции $u(t)$ и $v(t)$ входят в уравнения системы независимо. Поэтому нетрудно видеть, что множество достижимости $K(t)$ имеет вид:

$$K(t) = \{e^{-t} \le \rho(t) \le e^{t}, -t \le \varphi(t) \le t\}.$$



Возвращаясь к исходным переменным имеем:



Следовательно:

1) множество достижимости компактно, но не всегда выпукло, при $t = \pi$ даже не связно;

2) $(-1,0) \notin K(t)$ при $0 \le t < \pi$ и $(-1,0) \in \operatorname{int} K(\pi)$;

3) управления $u(t) \equiv 1, v(t) \equiv 0$ удовлетворяют принципу максимума на промежутке $t \in [0,\pi]$, однако соответствующая ему траектория $\rho(t) \equiv \rho_0 = 1, \varphi(t) = t + \varphi_0 = t$ не приводит к границе множества $K(\pi)$. Действительно, функция Гамильтона

$$H = (yu - xv)\psi_1 - (xu + yv)\psi_2 = (y\psi_1 - x\psi_2)u - (x\psi_1 + y\psi_2)v.$$

Из условия максимума получаем:

$$u = \begin{cases} -1, \text{ если } y\psi_1 - x\psi_2 < 0, \\ 1, \text{ если } y\psi_1 - x\psi_2 > 0, \\ [-1,1], \text{ если } y\psi_1 - x\psi_2 = 0, \end{cases} \qquad v = \begin{cases} -1, \text{ если } x\psi_1 + y\psi_2 < 0, \\ 1, \text{ если } x\psi_1 + y\psi_2 > 0, \\ [-1,1], \text{ если } y\psi_1 - x\psi_2 = 0. \end{cases}$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot\psi_1 = \psi_1 v + \psi_2 u, \quad \psi_1(\pi) = 0,$$
$$\dot\psi_2 = -\psi_1 u + \psi_2 v, \quad \psi_2(\pi) = 1.$$

Рассмотрим исходную и сопряженную систему при $u(t) \equiv 1, v(t) \equiv 0$ и покажем, что $y\psi_1 - x\psi_2 > 0$, $x\psi_1 + y\psi_2 = 0$:

$$\begin{cases} \dot x = y, \quad x(0) = 1, \\ \dot y = -x, \quad y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \ddot x = -x \Rightarrow \ddot x + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y(t) = \dot x(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases}$$

Из начальных условий получаем $c_1 = 1, c_2 = 0$ и

$$x(t) = \cos t, \; y(t) = -\sin t.$$

Аналогично для сопряженной системы имеем:

$$\begin{cases}\dot\psi_1=\psi_2, & \psi_1(\pi)=0,\\ \dot\psi_2=-\psi_1, & \psi_2(\pi)=1\end{cases} \Rightarrow \quad \ddot\psi_1=-\psi_1 \Rightarrow \ddot\psi_1+\psi_1=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\psi_1(t)=c_1\cos t+c_2\sin t,\\ \psi_2(t)=\dot\psi_1(t)=-c_1\sin t+c_2\cos t.\end{cases}$$

Из граничных условий получаем $c_1=0, c_2=-1$ и

$$\psi_1(t)=-\sin t, \psi_2(t)=-\cos t.$$

Тогда

$$y\psi_1-x\psi_2=\sin t(\sin t)-\cos t(-\cos t)=1>0,$$
$$x\psi_1+y\psi_2=\cos t(-\sin t)-\sin t(-\cos t)=0,$$

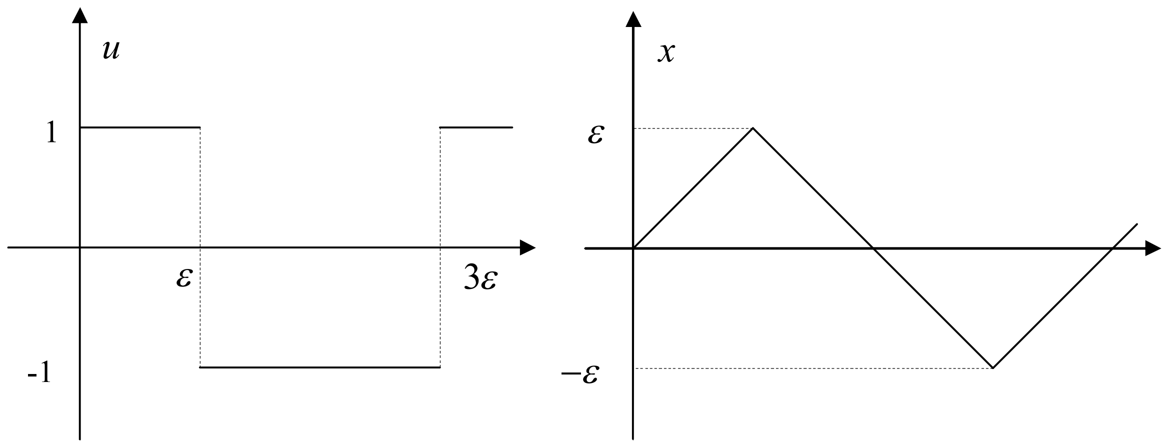
т.е. управления $u(t)\equiv 1, v(t)\equiv 0$ удовлетворяют принципу максимума

Пример 7.4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dot x=u, & x(0)=0,\\ \dot y=x^2 & y(0)=0,\end{cases} \quad u=\pm 1.$$

Точка $(0,0)\notin K(t)$ при $t>0$. Действительно, если предположить, что $(0,0)\in K(t)$, то $x(t)\equiv 0$ и $y(t)\equiv 0$, откуда следует, что $\int\limits_0^t x^2(s)ds=0$. Так как $x(s)$ непрерывна, то $x(s)\equiv 0$ при $s\in[0,t]$. Следовательно, $u(s)=\dot x(s)=0$ на $[0,t]$, что невозможно в силу того, что $u=\pm 1$.

Точка $(0,0)\in \overline{K}(t)$. Действительно, построим последовательность управлений $u_\varepsilon(t)$ и соответствующую им последовательность траекторий $x_\varepsilon(t)$:



Имеем $|x_\varepsilon(t)| \le \varepsilon \to 0$, $|y_\varepsilon(t)| = \int_0^t x_\varepsilon^2(s)ds < \varepsilon^2 t \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном t.

Последовательность точек $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) \in K(t)$ такова, что $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) \to (0,0)$ при $\varepsilon \to 0$, а $(0,0) \notin K(t)$. Следовательно, множество достижимости $K(t)$ не замкнуто.

8. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \to \min,\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1, \qquad (8.1)$$

где $F(x, y, y')$ - дважды непрерывно-дифференцируемая функция.

Перепишем задачу (8.1) в терминах задачи оптимального управления. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y} = u, \\ \dot{y}_1 = F(x, y, u) \end{cases} \text{ с граничными условиями } \begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y(x_1) = y_1, \\ y_1(x_0) = 0 \end{cases}$$

и критерием качества $J(u) = y_1[x_1] \to \min$.

Применим принцип максимума Понтрягина:

1) Составим функцию Гамильтона $H = \psi u + \psi_1 F(x, y, u)$;

2) Сопряженная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -\psi_1 \dfrac{\partial F(x, y, u)}{\partial y}, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial y_1} = 0 \end{cases} \text{ с граничным условием } \psi_1(x_1) = -1.$$

Значение $\psi(x_1)$ мы не фиксируем, т.к. задано значение y на правом конце $y(x_1) = y_1$. В силу второго уравнения системы и граничного условия, получим $\psi_1(x) \equiv -1$. Следовательно, первое утверждение примет вид

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial y}. \qquad (8.2)$$

3) Управление находим из условия максимума функции Гамильтона, причем, так как u принимает произвольные значения (на него никаких ограничений не накладывалось), воспользуемся дифференциальным принципом максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \psi - \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0 \Rightarrow \psi = \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u}. \qquad (8.3)$$

Из (8.2) и (8.3) имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial u}\right)=\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial y}.$$

Вернувшись к исходным обозначениям, получим

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\ -$$

уравнение Эйлера (необходимое условие минимума в простейшей задаче вариационного исчисления).

Необходимым условием второго порядка в точке максимума для функции Гамильтона является

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\le 0\ \Rightarrow\ -\frac{\partial^2 F(x,y,u)}{\partial u^2}\le 0\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y'^2}\ge 0-$$

полученное ранее условие Лежандра.

Запишем условие максимума в другой форме:

$$H(x,y,y_1,\psi,\psi_1,u)\ge H(x,y,y_1,\psi,\psi_1,v)\ \Rightarrow$$

$$\psi u-F(x,y,u)\ge\psi v-F(x,y,v)$$

с учетом (8.3)

$$\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial u}u-F(x,y,u)\ge\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial u}v-F(x,y,v)$$

или

$$F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y'}\ge 0$$

т.е. функция Вейерштрасса

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y'}\ge 0$$

в точках экстремали – выполняется необходимое условие экстремума Вейерштрасса.

Рассмотрим теперь простейшую изопериметрическую задачу:

$$\begin{gathered}v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx\to\min,\\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,\ \int_{x_0}^{x_1}h(x,y(x),y'(x))dx=L.\end{gathered}\tag{8.4}$$

Перепишем задачу (8.4) в виде задачи оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{y} = u \\ \dot{y}_1 = F(x, y, u) \\ \dot{y}_2 = h(x, y, u) \end{cases}$$

с граничными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ y_1(x_0) = 0,$$
$$y_2(x_0) = 0,\ y_2(x_1) = L$$

и критерием качества $J(u) = y_1[x_1] \to \min$.

Применим принцип максимума:

1) Составим функцию Гамильтона

$$H = \psi u + \psi_1 F(x, y, u) + \psi_2 h(x, y, u);$$

2) Сопряженная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -\psi_1 \dfrac{\partial F(x, y, u)}{\partial y} - \psi_2 \dfrac{\partial h(x, y, u)}{\partial y} \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial y_1} = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

с граничным условием $\psi_1(x_1) = -1$.

Следовательно, $\psi_1(x) \equiv -1,\ \psi_2(x) \equiv -\lambda = const$ и

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h(x, y, u)}{\partial y}. \tag{8.5}$$

3) Управление u найдем из дифференциального принципа максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \ \Rightarrow\ \psi - \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} - \lambda \frac{\partial h(x, y, u)}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\psi = \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} + \lambda \frac{\partial h(x, y, u)}{\partial u}. \tag{8.6}$$

Из (8.5) и (8.6) следует

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h(x, y, u)}{\partial u} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} + \lambda \frac{\partial h(x, y, u)}{\partial u} \right).$$

Если вернутся к исходным обозначениям, получим уравнение Эйлера для сопряженного функционала

$$\tilde{v}[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(F(x, y(x), y'(x)) + \lambda h(x, y(x), y'(x)) \right) dx.$$