МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И. И. МЕЧНИКОВА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И МЕХАНИКИ

Кафедра оптимального управления и экономической кибернетики

О. Д. Кичмаренко, Л. И. Плотникова,
Н. В. Скрипник

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания и варианты контрольних работ

Одесса
«Астропринт»
2009

ББК 22.161.8я73
УДК 517.97 (076)
К46

Рецензенты: А. В. Усов, д.-р техн. наук, профессор,
Т. А. Комлева, канд.физ.-мат.наук., доцент

Рекомендовано к печати ученым советом ИМЭМ ОНУ имени И. И. Мечникова.
Протокол № 5 от 20 марта 2009 г.

Кичмаренко О. Д., Плотникова Л.И., Скрипник Н.В.
К46 Вариационное исчисление: методические указания и варианты контрольних работ / О. Д. Кичмаренко, Л. И. Плотникова, Н. В. Скрипник. Одеса : Астропринт, 2009. 68 с.
ISBN 978-966-190-200-7

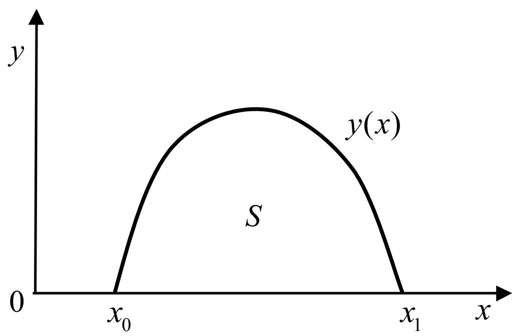
В методическом пособии излагаются классические результаты вариационного исчисления. Для различных типов задач вариационного исчисления выводятся необходимые условия экстремума. Рассматриваются всевозможные достаточные условия экстремума. Все теоретические результаты иллюстрируются примерами.

У методичних вказівках викладаються класичні результати варіаційного числення. Для різних типів задач варіаційного числення виводяться необхідні умови экстремума. Розглядаються всілякі достатні умови экстремума. Усі теоретичні результати ілюструються прикладами.

СОДЕРЖАНИЕ

I. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ВАРИАЦИОННЫМ ПРОБЛЕМАМ

Пример 1 (задача Дидоны). В IX в. до н.э. финикийская царевна Дидона и несколько ее спутников, спасаясь от преследования тирской знати, бежали из г.Тира и высадились на африканском берегу Средиземного моря. Решив поселится именно здесь, Дидона упросила местных жителей отдать в ее распоряжение участок земли, который можно охватить шкурой быка. Простодушный правитель тех мест не понял всей глубины замысла и согласился отдать беглецам участок земли, который, по его разумению, должен был по площади быть равным площади расправленной шкуры быка. Дидона же после заключения соглашения разрезала шкуру быка на тонкие полоски, связала их в длинный ремень и ограничила им довольно значительную территорию на берегу моря. Так был заложен город Карфаген.



Задача, которую поставила Дидона, может быть сформулирована следующим образом: найти такую кривую заданной длины L (L в упомянутой выше истории – длина ремня из шкуры быка), которая ограничивает на плоскости фигуру наибольшей площади.

Формализуем задачу. Считая берег моря прямолинейным, расположим прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox совпадала с берегом моря. Предположим, что прямолинейная (морская) часть границы участка земли есть отрезок $[x_0, x_1]$ оси Ox, а криволинейная часть является графиком гладкой (т.е. непрерывно дифференцируемой) функции $y = y(x)$, определенной на отрезке $[x_0, x_1]$. При этом

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \tag{1}$$

При сделанных предположениях длина L криволинейной части границы вычисляется по формуле

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx, \tag{2}$$

а площадь S земельного участка - по формуле

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx. \tag{3}$$

Итак, требуется найти такую гладкую функцию $y = y(x)$, которая удовлетворяет условиям (1) и (2) (L - фиксировано) и обеспечивает интегралу (3) максимальное значение.

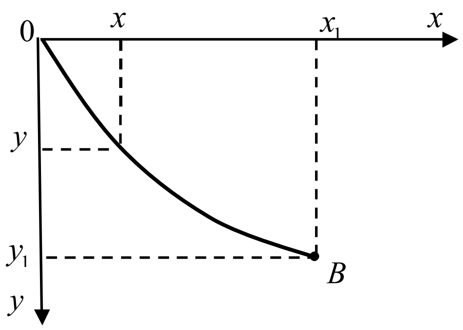
Задачи подобного рода ставили и решали (своими, оригинальными, способами) еще Аристотель и Архимед. Так, Архимед установил замечательное свойство окружности: из всех замкнутых кривых, длины которых равны некоторому заданному значению, окружность охватывает плоскую фигуру наибольшей площади.

Несмотря на наличие древних прецедентов, моментом рождения вариационного исчисления как математической дисциплины принято считать 1696 год, когда в июньском номере журнала "Acta Eruditorium" появилось письмо И.Бернулли, в котором он писал: "Остроумнейших математиков всего мира приветствую я, Иоганн Бернулли! Людей высокого ума нельзя ничем более привлечь к работе, как указать им трудную и вместе с тем полезную задачу, решением которой возможно и славу приобрести, и оставить по себе вечный памятник. Я надеюсь, что заслужу благодарность ученого мира, если я, по примеру Паскаля, Ферма и других великих, предложу лучшим математикам нашего времени задачу, которая даст им возможность испробовать, хороши ли те методы, которыми они владеют, и как велика сила их ума. Если кто-нибудь найдет решение предложенной задачи и сообщит об этом мне, то я объявлю ему публично заслуженную хвалу".

Вскоре были даны три решения задачи И.Бернулли: первое принадлежало Я.Бернулли, второе – Г.Лопиталю, третье появилось в английском научном журнале без подписи автора, но И.Бернулли без труда узнал в авторе И.Ньютона по его "львиным когтям".

Вот задача, предложенная И.Бернулли:

Пример 2 (задача о брахистохроне). В вертикальной плоскости через две заданные точки O и B, не лежащие на одной вертикали, провести кривую (т.е. найти ее уравнение), двигаясь по которой материальная точка под действием силы тяжести переместится из верхней точки в нижнюю за кратчайшее время. Ту же задачу можно сформулировать так: как спроектировать крышу дома, чтобы капли дождя скатывались с конька крыши за наименьший промежуток времени.



Предположим, что начальная скорость падающей точки равна нулю, а силы трения отсутствуют. К моменту, когда расстояние от начального положения точки O по вертикальной оси Oy прямоугольной системы координат Oxy будет равно y, точка потеряет потенциальную энергию, которая уменьшится на mgy (m - масса точки, g - ускорение свободного падения). Кинетическая энергия при этом увеличится на $\frac{mv^2}{2}$ (v - скорость точки). В силу закона сохранения энергии (с учетом отсутствия трения) имеем

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

откуда

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Далее, предполагая, что траекторией движения является кривая $y = y(x)$, причем $y(x)$ - гладкая функция, определенная на отрезке $[0, x_1]$, получаем

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}dx}{dt},$$

где ds – дифференциал длины дуги кривой, t – время. Поэтому

$$\sqrt{2gy(x)}dt = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx,$$

и приходим к уравнению

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}dx.$$

Из этого уравнения находим время, необходимое для перехода из точки O в точку B:

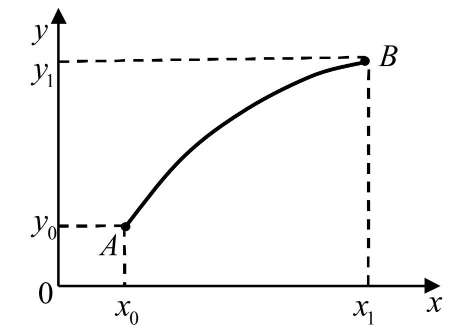
$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}dx. \tag{4}$$

Известные координаты начальной и конечной точек дают краевые условия для функции $y(x)$:

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{5}$$

Таким образом, нужно найти гладкую функцию $y(x)$, для которой время T минимально при краевых условиях (5).

Пример 3 (задача о преломлении света). Согласно принципу Ферма, луч света, выходящий из точки A и попадающий в точку B, избирает путь, время перехода по которому является наименьшим. В однородной среде скорость света постоянна, а свет распространяется по прямым. Если же среда неоднородна, то скорость света изменяется от точки к точке, а траектории лучей света уже не будут прямыми. Пусть средой является атмосфера. Поскольку плотность воздуха зависит от высоты y над уровнем моря, то правомерно предположить, что и скорость света v зависит от y и выражается с помощью известной функции $v(y)$. Определим траекторию луча света из данной точки A в данную точку B. В вертикальной плоскости, проходящей через точки A и B, выберем прямоугольную систему координат так, что ось Ox горизонтальна и расположена на уровне моря. Нам известны координаты $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Считаем, что луч света распространяется по кривой, являющейся графиком гладкой функции $y(x)$, определенной на отрезке $[x_0, x_1]$.



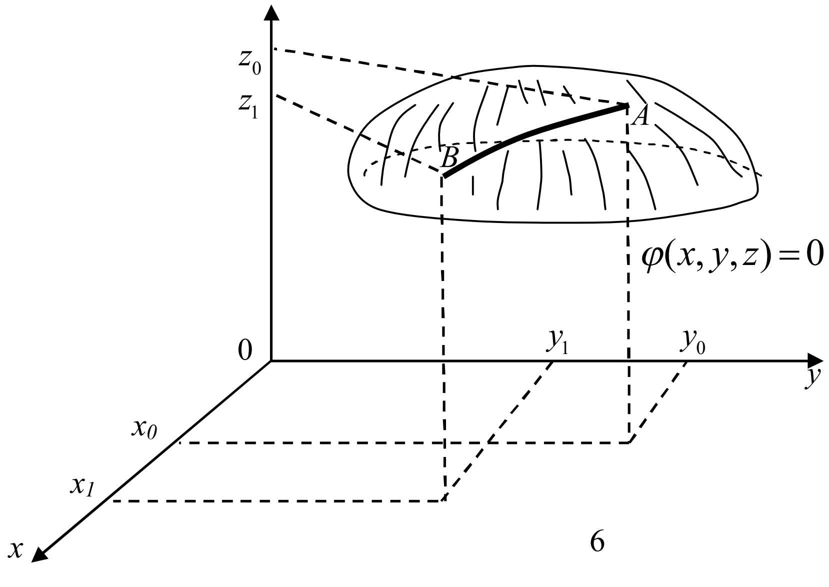
При сделанных предположениях имеем $v(y) = \dfrac{ds}{dt}$, где $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$ – дифференциал длины дуги кривой $y = y(x)$. Поэтому время T, необходимое для перехода света из точки A в точку B, выражается интегралом:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(y(x))} dx. \tag{6}$$

Задача состоит в определении такой гладкой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, что интеграл (6) принимает наименьшее значение.

Сравнив (6) и (4), отметим, что задача о брахистохроне — частный случай задачи о преломлении света. Этот факт, подмеченный впервые И.Бернулли, представляет собой так называемую оптико-механическую аналогию.

Пример 4 (задача о геодезических линиях). На поверхности, заданной в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, требуется провести кривую, соединяющую две точки A и B этой поверхности и имеющую наименьшую длину.



Наименьшие по длине линии между двумя точками некоторой поверхности называются **геодезическими линиями** этой поверхности. Например, геодезическими линиями плоскости являются прямые, геодезическими линиями на сфере — дуги большого круга.

Предположим, что поверхность $\varphi(x, y, z) = 0$ является гладкой, а искомая кривая может быть задана параметрическими уравнениями $y = y(x), z = z(x),\ x \in [x_0, x_1]$ с помощью гладких функций $y(x)$ и $z(x)$. Тогда длина кривой L равна:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}dx. \tag{7}$$

Задача свелась к определению таких гладких на отрезке $[x_0, x_1]$ функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$, что

$$\varphi(x, y(x), z(x)) \equiv 0,\ y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0,\ y(x_1) = y_1,\ z(x_1) = z_1,$$

а интеграл (7) принимает наименьшее значение.

Оригинальность сформулированных задач в том, что неизвестными в них являются функции, при которых значение интеграла будет наименьшим.

Первым, кто сделал попытку обобщения всех этих задач, был Л.Эйлер, который в 1744 г. выпустил мемуары по вариационному исчислению. Однако Л.Эйлеру не удалось аналитически обосновать вариационное исчисление. Это было сделано в 1760 г. французским математиком Г.Лагранжем. Дальнейшие исследования уже в XIX столетии шли по пути, намеченном Л.Эйлером, Г.Лагранжем и были завершены работами К.Вейерштрасса и Д.Гильберта. В конце XIX и начале XX столетий швейцарский физик и математик В.Ритц открыл, пользуясь работами Дж.Релея, новую главу вариационного исчисления, так называемые "прямые методы". В этом направлении много сделал американский математик Р.Курант, до прихода к власти Гитлера работавший в Германии, советские математики Л.В.Канторович, Б.Г.Галеркин, И.Г.Бубнов, В.И.Крылов. Последний и обосновал метод Ритца. В конце XIX столетия женщина-математик Н.Гернет, профессор высших женских курсов в Петербурге, выпустила работу по вариационному исчислению, где ею решались неклассические задачи вариационного исчисления, но работа не была замечена, потому что она значительно опередила свое время. Только в наше время подобного рода задачи в более широкой постановке нашли применение в оптимальном управлении.

II. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Решение отдельных задач нахождения максимума или минимума функционалов (т.е. величин, численное значение которых определяется выбором одной или нескольких функций) привело к созданию новой математической дисциплины – вариационного исчисления, предметом которого и является исследование общих методов определения экстремумов функционалов. Приведенные выше задачи являются типичными задачами вариационного исчисления, или короче – вариационными задачами. Методы решения вариационных задач весьма сходны с методами исследования на максимум и минимум функций.

Определение 1. *Переменная величина V называется* ***функционалом****, зависящим от функции* $y(x)$*, что обозначается так:* $V=V[y(x)]$*, если каждой функции* $y(x)$ *из некоторого класса функций M соответствует значение V, т.е. имеет место соответствие: функции* $y(x)$ *соответствует число V.*

Класс функций M*, на которых определен функционал, называется* ***областью определения функционала****.*

Аналогично определяются функционалы, зависящие от нескольких функций, и функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.

Определение 2. ***Приращением*** *или* ***вариацией*** $\delta y(x)$ *аргумента* $y_0(x)$ *функционала* $V[y(x)]$ *называется разность между двумя функциями* $\delta y(x)=y(x)-y_0(x)$.

При этом предполагается, что $y(x)$ меняется произвольно в классе функций M. В дальнейшем для сокращения записи у приращения $\delta y(x)$ аргумент x будем опускать.

Понятие непрерывности функционала связано с оценкой изменения функционала $V[y(x)]$ при малом изменении (приращении) функции $y_0(x)$. При этом сразу возникает вопрос: какие изменения функции $y(x)$, являющейся аргументом функционала, называются малыми или, что то же самое, какие кривые $y=y(x)$ и $y=y_0(x)$ считаются мало отличающимися или близкими?

Можно считать близкими функции $y(x)$ и $y_0(x)$ в том случае, если модуль разности $y(x)-y_0(x)$ мал для всех значений x, для которых задаются функции $y(x)$ и $y_0(x)$, т.е. считаются близкими кривые, близкие по ординатам.

Однако при таком определении близости кривых часто встречающиеся в приложениях функционалы вида

$$V[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))dx$$

из-за наличия в подынтегральной функции аргумента y' лишь в исключительных случаях будут непрерывными. Поэтому во многих случаях более естественно считать близкими только те кривые, которые близки и по ординатам и по направлениям касательных в соответствующих точках, т.е. требовать, чтобы для близких кривых не только модуль разности $y(x)-y_0(x)$ был мал, но, кроме того, был бы мал и модуль разности $y'(x)-y_0'(x)$.

Иногда же оказывается необходимым считать близкими только те функции, для которых малы модули каждой из разностей:

$$y(x)-y_0(x),\ y'(x)-y_0'(x),\dots,\ y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)$$

для всех значений $õ$, для которых задаются функции $y(x)$ и $y_0(x)$. В связи с этим приходится ввести следующее определение близости кривых $y=y(x)$ и $y=y_0(x)$:

Определение 3. *Кривые* $y=y(x)$ *и* $y=y_0(x)$ ***близки в смысле близости*** κ***-го***

порядка (k = 0, 1, ...), *если модули разностей* $y(x)-y_0(x)$, $y'(x)-y_0'(x),\ldots,$ $y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)$ *малы для всех значений* x, *для которых задаются функции* $y(x)$ *и* $y_0(x)$.

Иными словами, кривые $y=y(x)$ и $y=y_0(x)$ близки в смысле близости κ-го порядка, если норма $\|y-y_0\|_{C^k[x_0,x_1]}=\sum\limits_{i=0}^{k}\max\limits_{x\in[x_0,x_1]}\left|y^{(i)}(x)-y_0^{(i)}(x)\right|$ мала, где $[x_0,x_1]$ - промежуток, на котором задаются функции $y(x)$ и $y_0(x)$.

На рис.1 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, но не близкие в смысле близости первого порядка, так как ординаты у них близки, а направления касательных не близки. На рис.2 изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка.

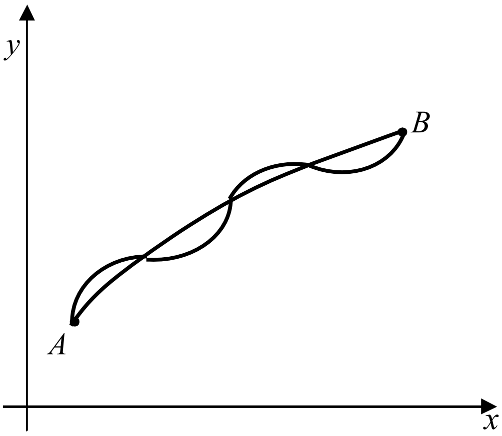


Рис.1.

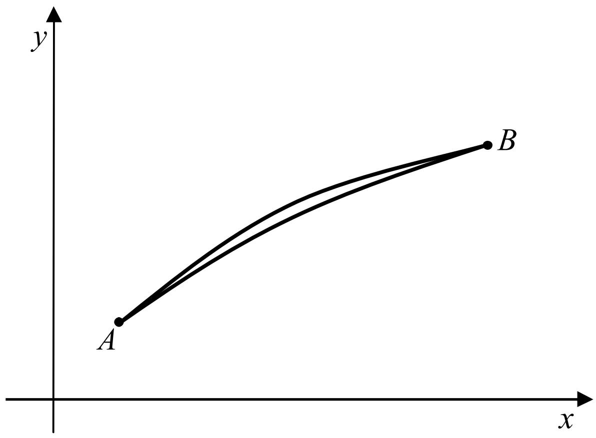


Рис.2

Из определения 3 следует, что если кривые близки в смысле близости κ-го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Пример 1. Кривые $y(x)=\dfrac{1}{n}\sin n^2x$, где n достаточно велико, и $y_0(x)\equiv 0$ близки в смысле близости нулевого порядка на $[0,\pi]$, так как

$$|\,y(x)-y_0(x)\,|=\left|\frac{1}{n}\sin n^2x\right|\le\frac{1}{n},$$

т.е. на всем отрезке $[0,\pi]$ эта разность по модулю мала при достаточно большом n.

Близости первого порядка нет, так как

$$|\,y'(x)-y_0'(x)\,|=n\,|\cos n^2x\,|$$

и, например, в точках $x=\dfrac{2\pi}{n^2}$ имеем

$$|\,y'(x)-y_0'(x)\,|=n$$

и, значит, $|\,y'(x)-y_0'(x)\,|$ может быть сделан как угодно большим при n достаточно большом.

Пример 2. Кривые $y(x)=\dfrac{1}{n^2}\sin nx$, где n достаточно велико, и $y_0(x)\equiv 0$ близки в смысле близости первого порядка на [0, π], ибо

$$|y(x)-y_0(x)|=\left|\frac{1}{n^2}\sin nx\right|\le\frac{1}{n^2}$$

и

$$|y'(x)-y_0'(x)|=\left|\frac{1}{n}\cos nx\right|\le\frac{1}{n}$$

малы при достаточно большом n. Близости второго порядка нет, так как

$$|y''(x)-y_0''(x)|=|\sin nx|$$

и, например, в точках $x=\dfrac{\pi}{2n}$ имеем $|y''(x)-y_0''(x)|=1$.

Теперь можно ввести понятие непрерывности функционала.

Определение 4. *Функционал $V[y(x)]$* ***непрерывен при*** $y=y_0(x)$ ***в смысле близости к-го порядка****, если для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что*

$$\left|V[y(x)]-V[y_0(x)]\right|<\varepsilon$$

при $|y(x)-y_0(x)|<\delta,\ |y'(x)-y_0'(x)|<\delta,\ldots,\ |y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\delta$ для всех значений x, для которых задаются функции $y(x)$ и $y_0(x)$. При этом подразумевается, что функции ó(õ) берутся из класса функций M, на котором функционал $V[y(x)]$ определен.

Кривые, на которых сравниваются значения функционала, называются **допустимыми кривыми.**

Пример 3. Показать, что функционал $V[y(x)]=\int\limits_0^1(y(x)+2y'(x))dx,$ определенный в пространстве $C^1[0,1]$, непрерывен на функции $y_0(x)=x$ в смысле близости первого порядка.

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Покажем, что существует число $\delta>0$ такое, что $|V[y(x)]-V[y_0(x)]|<\varepsilon$ как только $|y(x)-x|<\delta$ и $|y'(x)-1|<\delta$. Имеем

$$|V[y(x)]-V[y_0(x)]|=\left|\int\limits_0^1\big(y(x)+2y'(x)-x-2\big)dx\right|\le\int\limits_0^1|y(x)-x|\,dx+2\int\limits_0^1|y'(x)-1|\,dx.$$

Выберем $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}.$ Тогда при всех $y(x)\in C^1[0,1]$, для которых $|y(x)-x|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ и $|y'(x)-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, будем иметь $|V[y(x)]-V[y_0(x)]|<\varepsilon$.

Итак, для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, например, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, такое, что как только $|y(x)-x|<\delta$ и $|y'(x)-1|<\delta$, то $|V[y(x)]-V[y_0(x)]|<\varepsilon$. Это и означает, согласно определению, что данный функционал непрерывен на функции $y_0(x)=x$ в смысле близости первого порядка.

Пример 4. Показать, что функционал $V[y(x)]=\int\limits_0^\pi y'^2(x)dx,$ определенный в пространстве $C^1[0,\pi]$, разрывен на функции $y_0(x)\equiv0$ в смысле близости нулевого порядка.

Действительно, пусть $y_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$, тогда $|y_n(x)-y_0(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\le\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. С другой стороны, разность

$$V[y_n(x)]-V[y_0(x)]=\int_0^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

не зависит от n. Таким образом, при $n\to\infty$ $V[y_n(x)]$ не стремится к $V[y_0(x)]=0$ и, следовательно, данный функционал разрывен на функции $y_0(x)\equiv 0$ в смысле близости нулевого порядка.

Пример 5. Показать, что функционал $V[y(x)]=\int_0^1 x^3\sqrt{1+y^2(x)}dx$, определенный в пространстве $C[0,1]$, непрерывен на функции $y_0(x)=x^2$ в смысле близости нулевого порядка.

Положим $y(x)=x^2+\alpha\eta(x)$, где $\eta(x)\in C[0,1], \alpha$ – сколь угодно мало. Тогда

$$V[y(x)]=V[x^2+\alpha\eta(x)]=\int_0^1 x^3\sqrt{1+(x^2+\alpha\eta(x))^2}dx=\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4+2\alpha x^2\eta(x)+\alpha^2\eta^2(x)}dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\alpha\to 0$, получим

$$\lim_{\alpha\to 0}V[y(x)]=\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}dx=V[x^2],$$

что и означает непрерывность функционала на функции $y_0(x)=x^2$.

Очевидно, что если функционал $V[y(x)]$ непрерывен при $y=y_0(x)$ в смысле близости κ-орядка, то он непрерывен при $y=y_0(x)$ и в смысле близости любого порядка, больше κ-го.

Определение 5. Линейным функционалом *называется функционал $L[y(x)]$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $L[cy(x)]=cL[y(x)]$, где с – произвольная постоянная;

2) $L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]$.

Примерами линейных функционалов являются

$$L_1[y(x)]=y(x_0) \text{ и } L_2[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(p(x)y(x)+q(x)y'(x))dx.$$

Определение 6. *Если приращение функционала $\Delta V=V[y(x)+\delta y]-V[y(x)]$ можно представить в виде*

$$\Delta V=L[y(x),\delta y]+\beta(y(x),\delta y)\|\delta y\|,$$

где $L[y(x),\delta y]$ - линейный по отношению к δy функционал, $\|\delta y\|$ - норма функции δy и $\beta(y(x),\delta y)\to 0$ при $\|\delta y\|\to 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т.е. $L[y(x),\delta y]$, называется ***вариацией функционала*** *и обозначается $\delta V[y(x)]$.*

При исследовании функционалов вариация играет такую же роль, какую играет дифференциал при исследовании функций.

Понятие нормы функции напрямую связано с областью определения M функционала. Если $M\subset C^k[x_0,x_1]$, то $\|\delta y\|=\sum_{i=0}^{k-1}\max_{x\in[x_0,x_1]}\left\|\delta y^{(k-1)}(x)\right\|$.

Можно дать и другое, почти эквивалентное, определение вариации функционала:

Определение 6*. Вариация функционала *$V[y(x)]$ равна*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}V\left[y(x)+\alpha\delta y\right]\big|_{\alpha=0}. \tag{8}$$

Если существует вариация в смысле линейной (относительно $\delta \acute{o}$) части приращения функционала, то существует и вариация в смысле производной по параметру при нулевом значении параметра, и оба эти определения эквивалентны. Действительно, если функционал имеет вариацию в смысле линейной части приращения, то его приращение имеет вид:

$$\Delta V = V[y(x)+\alpha\delta y]-V[y(x)] = L\left[y(x),\alpha\delta y\right]+\beta(y(x),\alpha\delta y)\|\alpha\delta y\|.$$

Тогда производная от $V[y(x)+\alpha\delta y]$ по α при $\alpha=0$ равна

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}V\left[y(x)+\alpha\delta y\right]\big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to0}\frac{\Delta V}{\alpha} = \lim_{\alpha\to0}\frac{L\left[y(x),\alpha\delta y\right]+\beta(y(x),\alpha\delta y)\|\alpha\delta y\|}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha L[y(x),\delta y]+|\alpha|\beta(y(x),\alpha\delta y)\|\delta y\|}{\alpha} = L[y(x),\delta y],$$

что и требовалось доказать.

Пример 6. Найти вариацию функционала

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)dx.$$

<u>*Первый способ.*</u> Запишем приращение функционала

$$\Delta V = \int_{x_0}^{x_1}(y(x)+\delta y)^2\,dx - \int_{x_0}^{x_1}y^2(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}(2y(x)\delta y+(\delta y)^2)dx.$$

Так как

$$\int_{x_0}^{x_1}(\delta y)^2dx \le \int_{x_0}^{x_1}\left(\max_{x\in[x_0,x_1]}|\delta y|\right)^2dx = (x_1-x_0)\left(\max_{x\in[x_0,x_1]}|\delta y|\right)^2 = (x_1-x_0)\|\delta y\|^2,$$

то

$$\Delta V = 2\int_{x_0}^{x_1}y(x)\delta y dx + \beta\left(y(x),\delta y\right)\|\delta y\|,$$

где

$$\left|\beta\left(y(x),\delta y\right)\right| \le (x_1-x_0)\|\delta y\| \to 0 \text{ при } \|\delta y\|\to 0.$$

Поэтому вариация функционала имеет вид

$$\delta V[y(x)] = 2\int_{x_0}^{x_1}y(x)\delta y dx.$$

<u>*Второй способ*</u>. Воспользуемся формулой (8):

$$\delta V[y(x)] = \frac{\partial}{\partial\alpha}V[y(x)+\alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1}(y(x)+\alpha\delta y)^2\,dx\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}2(y(x)+\alpha\delta y)\delta y\big|_{\alpha=0}\,dx = 2\int_{x_0}^{x_1}y(x)\delta y dx.$$

Очевидно, оба способа привели к одному и тому же результату.

Пример 7. Найти вариацию функционала

$$V[y(x)] = \int_0^1(y^2(x)+y'^2(x))dx.$$

<u>*Первый способ.*</u> Запишем приращение функционала

$$\Delta V = \int_0^1((y(x)+\delta y)^2+(y'(x)+\delta y')^2)\,dx - \int_0^1((y^2(x)+y'^2(x))dx =$$

$$=\int_0^1 (2y(x)\delta y+2y'(x)\delta y'+(\delta y)^2+(\delta y')^2)dx.$$

Так как

$$\int_0^1 \left[(\delta y)^2+(\delta y')^2\right]dx \le \int_0^1 \left((\max_{x\in[0,1]}|\delta y|)^2+(\max_{x\in[0,1]}|\delta y'|)^2 \right)dx \le \left(\max_{x\in[0,1]}|\delta y|+\max_{x\in[0,1]}|\delta y'| \right)^2 = \|\delta y\|^2,$$

то

$$\Delta V = 2\int_0^1 \left(y(x)\delta y + y'(x)\delta y' \right)dx + \beta\left(y(x),\delta y\right)\|\delta y\|,$$

где

$$\left|\beta\left(y(x),\delta y\right)\right| \le \|\delta y\| \to 0 \text{ при } \|\delta y\| \to 0$$

и вариация функционала имеет вид

$$\delta V[y(x)] = 2\int_0^1 \left(y(x)\delta y + y'(x)\delta y' \right)dx.$$

<u>*Второй способ.*</u> Воспользуемся формулой (8), получим

$$\delta V = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^1 \left((y(x)+\alpha\delta y)^2+(y'(x)+\alpha\delta y')^2 \right)dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$=\int_0^1 \left(2(y(x)+\alpha\delta y)\delta y+2(y'(x)+\alpha\delta y')\delta y' \right)\Big|_{\alpha=0} dx = 2\int_0^1 (y(x)\delta y+y'(x)\delta y')dx.$$

Следует отметить, что второе определение вариации несколько шире первого, так как существуют примеры функционалов, для которых нельзя выделить линейной части, но вариация в смысле второго определения существует.

Пример 8. Пусть

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt[3]{y^3(x)+y'^3(x)}dx.$$

Тогда при $y(x)\equiv 0$ и произвольной вариации δy величина

$$\delta V[y(x)] = \frac{\partial}{\partial\alpha}V\left[y(x)+\alpha\delta y\right]\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt[3]{(\alpha\delta y)^3+(\alpha\delta y')^3}dx\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt[3]{(\delta y)^3+(\delta y')^3}dx$$

нелинейна относительно δy, т.е. не является вариацией функционала в смысле определения 6.

Определение 7. *Говорят, что функционал $V[y(x)]$, определенный на функциях $y(x)$ из класса M, достигает на функции $y_0(x)$* ***глобального минимума (максимума)****, если*

$$V[y_0(x)] \le V[y(x)] \quad (\text{соответственно} \quad V[y_0(x)] \ge V[y(x)])$$

для всех $y(x)\in M$.

Пример 9. Доказать, что на функции $y_0(x)=x$ функционал $V[y(x)]=\int_0^1 y'^2(x)dx$ достигает глобального минимума в классе функций $M=\{y(x)\in C^1[0,1]: y(0)=0, y(1)=1\}$.

Очевидно, что функция $y_0(x)=x\in M$. Рассмотрим вариации $\delta y\in C^1\left[0,1\right]$, удовлетворяющие условиям $\delta y(0)=\delta y(1)=0$. Исследуем знак приращения:

$$\Delta V = V[y_0(x)+\delta y] - V[y_0(x)] = \int_0^1 (y_0'(x)+\delta y')^2 dx - \int_0^1 y_0'^2(x)dx = 2\int_0^1 \delta y' dx + \int_0^1 \left(\delta y'\right)^2 dx =$$

$$= 2\delta y\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\delta y'\right)^2 dx = \int_0^1 \left(\delta y'\right)^2 dx \geq 0.$$

Так как кривая $y(x) = y_0(x) + \delta y \in M$ произвольна и из доказанного неравенства следует, что

$$V[y(x)] = V[y_0(x)+\delta y] \geq V[y_0(x)],$$

то на функции $y_0(x) = x$ достигается глобальный минимум.

Пример 10. Доказать, что на функции $y_0(x) = x^3 - x^2$ функционал $V[y(x)] = \int_0^1 y''^2(x)dx$ достигает глобального минимума в классе функций $M = \{y(x) \in C^2[0,1]:\ y(0) = y(1) = y'(0) = 0,\ y'(1) = 1\}$.

Очевидно, что функция $y_0(x) = x^3 - x^2 \in M$. Рассмотрим вариации $\delta y \in C^2[0,1]$, удовлетворяющие условиям $\delta y(0) = \delta y(1) = \delta y'(0) = \delta y'(1) = 0$.

Исследуем знак приращения:

$$\Delta V = \int_0^1 (x^3 - x^2 + \delta y)''^2 dx - \int_0^1 (x^3 - x^2)''^2 dx = \int_0^1 \left[(6x - 2 + \delta y'')^2 - (6x-2)^2\right] dx =$$

$$= \int_0^1 (12x - 4 + \delta y'')\delta y'' dx = \int_0^1 (12x-4)\delta y'' dx + \int_0^1 (\delta y'')^2 dx.$$

Первый интеграл возьмем по частям, учитывая граничные условия:

$$\int_0^1 (12x-4)\delta y'' dx = \begin{bmatrix} u = 12x - 4 & du = 12dx \\ dv = \delta y'' dx & v = \delta y' \end{bmatrix} =$$

$$= \left((12x-4)\delta y'\right)\Big|_0^1 - 12\int_0^1 \delta y' dx = -12\int_0^1 \delta y' dx = -12\delta y\Big|_0^1 = 0.$$

Тогда

$$\Delta V = \int_0^1 (\delta y'')^2 dx \geq 0.$$

Так как вариация $\delta y \in C^2[0,1]$ произвольна и из доказанного неравенства следует, что

$$V[y(x)] = V[y_0(x)+\delta y] \geq V[y_0(x)],$$

то на функции $y_0(x) = x^3 - x^2$ достигается глобальный минимум.

Понятие локального минимума (максимума) связано с исследованием поведения функционала на близких кривых.

Определение 8. *Функционал $V[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$* ***локального максимума****, если значение функционала $V[y(x)]$ на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше, чем $V[y_0(x)]$, т.е.*

$$\Delta V = V[y(x)] - V[y_0(x)] \leq 0.$$

Если $\Delta V \leq 0$, причем $\Delta V = 0$ только при $y(x) = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается ***строгий максимум****.*

Аналогично определяется кривая $y = y_0(x)$, на которой реализуется локальный минимум. В этом случае $\Delta V \geq 0$ для всех кривых, близких к кривой $y = y_0(x)$.

Понятие локального экстремума функционала нуждается в уточнении. Говоря о локальном максимуме или минимуме, мы имеем в виду наибольшее или наименьшее значение функционала только по отношению к значению функционала на близких кривых. Но, как было указано выше, близость кривых может пониматься по разному, поэтому в определении локального максимума или минимума надо указывать, какого порядка близость имеется в виду.

Если функционал $V[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ локального максимума или минимума по отношению ко всем кривым $y = y(x)$, для которых модуль разности $y(x) - y_0(x)$ мал, т.е. по отношению к кривым, близким в смысле близости нулевого порядка, то максимум или минимум называется ***сильным.***

Если же функционал $V[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ локального максимума или минимума по отношению ко всем кривым $y = y(x)$ близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости первого порядка, т.е. по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ не только по ординатам, но и по направлениям касательных, то максимум или минимум называется ***слабым.***

Очевидно, что если на кривой $y = y_0(x)$ достигается сильный максимум (или минимум), то подавно достигается и слабый, так как если кривая близка к $y = y_0(x)$ в смысле близости первого порядка, то она близка и в смысле близости нулевого порядка.

Однако, возможно, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается слабый максимум (или минимум), т.е. для всех кривых $y = y(x)$, близких к $y = y_0(x)$ как по ординатам, так и по направлению касательных, будет выполняться неравенство:

$$V[y(x)] \leq V[y_0(x)] \text{ (в случае максимума)}$$

или

$$V[y(x)] \geq V[y_0(x)] \text{ (в случае минимума),}$$

а среди кривых $y = y(x)$, близких только по ординатам, но уже не близких по направлениям касательных (более широкое множество кривых), найдутся такие, для которых

$$V[y(x)] > V[y_0(x)] \text{ (соответственно } V[y(x)] < V[y_0(x)]\text{).}$$

Пример 11. Доказать, что на функции $y_0(x) \equiv 0$ функционал $V[y(x)] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} y'^2(x)\left(1 - y^2(x)\right)dx$ достигает сильного минимума в классе функций $M = \{y(x) \in C^1[-\pi,\pi]:\ y(-\pi) = y(\pi) = 0\}$.

Пусть $y(x) \in M$ – произвольная функция, близкая к $y_0(x)$ в смысле близости нулевого порядка, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что $|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon,\ x \in [-\pi,\pi]$.

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда для всех функций $y(x)$ из ε- окрестности нулевого порядка функции $y_0(x)$ выполнено условие $|y(x)| < \varepsilon = 1$. Поэтому $0 \leq y^2(x) < 1$, откуда $1 - y^2(x) > 0$ для всех $x \in [-\pi,\pi]$. Тогда

$$\Delta V = V[y(x)] - V[y_0(x)] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} y'^2(x)\left(1 - y^2(x)\right)dx \geq 0,$$

а значит на функции $y_0(x) \equiv 0$ функционал достигает сильного минимума.

Пример 12. Доказать, что на функции $y_0(x) \equiv 0$ функционал

$V[y(x)]=\int_0^{\pi} y^2(x)\left(1-y'^2(x)\right)dx$ достигает слабого минимума в классе функций $M=\{y(x)\in C^1[0,\pi]:\ y(0)=y(\pi)=0\}$.

Так как $V\left[y_0(x)\right]=0,$ то, согласно определению, требуется доказать, что существует $\varepsilon>0$ такое, что для всех $y(x)\in M,$ удовлетворяющих условию

$$\left|y(x)\right|<\varepsilon,\ \left|y'(x)\right|<\varepsilon \text{ для всех } x\in[0,\pi],$$

справедливо неравенство $V\left[y(x)\right]\ge V\left[y_0(x)\right]=0.$ Пусть $\varepsilon=1,$ тогда для всех функций из $\varepsilon-$окрестности первого порядка функции $y_0(x)\equiv 0$ выполняются условия $\left|y(x)\right|<1,\ \left|y'(x)\right|<1.$ Поэтому $0\le y^2(x)<1$ è $1-y'^2(x)>0$ для всех $x\in[0,\pi]$.

Тогда $V\left[y(x)\right]=\int_0^{\pi} y^2(x)\left[1-y'^2(x)\right]dx\ge 0,$ что и требовалось доказать. Следовательно, на функции $y_0(x)\equiv 0$ функционал достигает слабого минимума.

Исследуем функционал на наличие сильного минимума. При $\varepsilon>0$ $\varepsilon-$окрестность нулевого порядка функции $y_0(x)\equiv 0$ образуют функции, удовлетворяющие условию $\left|y(x)\right|<\varepsilon$ для всех $x\in[0,\pi]$. Но среди них можно подобрать такую функцию, например, $y(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx,$ что

$$V\left[y(x)\right]=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^2 nx\left(1-n\cos^2 nx\right)dx=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^2 nxdx-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 2nxdx=$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2nx\right)dx-\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 4nx\right)dx=\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8}<0 \text{ при } n>4.$$

Поэтому условие $V\left[y(x)\right]\ge V\left[y_0(x)\right]=0$ на некоторых функциях из $\varepsilon-$окрестности нулевого порядка функции $y_0(x)\equiv 0$ может не выполняться. Следовательно, на функции $y_0(x)\equiv 0$ функционал не достигает сильного минимума.

Пример 13. Рассмотрим функционал $V[y(x)]=\int_{-1}^{1} x^2 y'^2(x)dx$ в классе функций $M=\{y(x)\in C^1[-1,1]:\ y(-1)=-1,\ y(1)=1\}$.

Имеем $V[y(x)]\ge 0,$ причем $V[y(x)]=0$ только при $y'(x)\equiv 0$, т.е. при $y(x)\equiv c=const$**.** Функция $y(x)\equiv c$ принадлежит к классу функций $C^1[-1,1]$, но не удовлетворяет заданным краевым условиям. Следовательно, $V[y(x)]>0$ для всех $y(x)\in M$. Таким образом, функционал имеет нижнюю грань, но она не достигается на кривых $y(x)\in M$. В самом деле, рассмотрим однопараметрическое семейство кривых

$$y_\alpha(x)=\frac{arctg\,\frac{x}{\alpha}}{arctg\,\frac{1}{\alpha}},\ \alpha>0.$$

Эти кривые удовлетворяют краевым условиям $y_\alpha(-1)=-1, y_\alpha(1)=1.$ В пределе при $\alpha\to 0$ получим функцию

$$\tilde{y}(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x\le 1\end{cases}\qquad \text{или}\qquad \tilde{y}(x)=\operatorname{sgn} x.$$

Эта функция принадлежит к классу функций, кусочно-непрерывных на отрезке $[-1,1]$.

Имеем

$$V[y_\alpha(x)] = \int_{-1}^{1} \frac{\alpha x^2 dx}{(\alpha^2 + x^2) arctg^2 \frac{1}{\alpha}} = \frac{2\alpha}{arctg^2 \frac{1}{\alpha}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{2\alpha}{arctg^2 \frac{1}{\alpha}} \left(1 - \alpha arctg \frac{1}{\alpha}\right).$$

Ясно, что $V[y_\alpha(x)] \to 0$ при $\alpha \to 0$. На предельной функции $\tilde{y}(x)$, удовлетворяющей краевым условиям $\tilde{y}(-1) = -1,\ \tilde{y}(1) = 1$, функционал принимает значение, равное нулю: $V[\tilde{y}(x)] = 0.$

Таким образом, функционал $V[y(x)]$ достигает своего минимума на кривой $\tilde{y}(x) = \operatorname{sgn} x$, которая принадлежит к классу функций, кусочно-непрерывных на отрезке $[-1,1]$, но не принадлежит классу M .

Получим необходимое условие экстремума.

Теорема. *Если функционал $V[y(x)]$, имеющий вариацию (в смысле определения 6 или 6*), достигает максимума или минимума при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ - внутренняя точка области определения функционала, то*

$$\delta V[y_0(x)] = 0.$$

<u>Доказательство.</u> При фиксированных $y_0(x)$ и δy функционал $V[y_0(x) + \alpha\delta y] = \varphi(\alpha)$ является функцией параметра α. При $\alpha = 0$ функционал достигает экстремального значения $V[y_0(x)]$. Заметим, что α может принимать в окрестности точки $\alpha = 0$ как положительные, так и отрицательные значения (в силу того, что $y_0(x)$ является внутренней точкой области определения функционала). Так как точка $\alpha = 0$ является точкой локального экстремума функции $\varphi(\alpha)$, то, применяя необходимое условие локального экстремума функции, получаем

$$\varphi'(0) = \frac{\partial}{\partial\alpha} V\left[y_0(x) + \delta y\right]\Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \delta V[y_0(x)] = 0\,.$$

Теорема доказана.

При выводе необходимого условия экстремума $\delta V = 0$ не имело существенного значения различие между сильным и слабым экстремумом, но оно является существенным при изучении достаточных условий экстремума.

Все введенные определения и теорема почти без всякого изменения переносятся на функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций, или зависящие от одной или нескольких функций многих переменных.

III. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

1. Постановка задачи. Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[x_0, x_1]$, где x_0 и x_1 заданы, т.е. $y(x) \in C^1[x_0, x_1]$;

б) функции $y(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ \ y(x_1) = y_1, \tag{9}$$

где значения y_0, y_1 заданы, т.е. кривые проходят через две закрепленные граничные точки.

На множестве M задан функционал

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{10}$$

где подынтегральная функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $y_0(x)$, на которой функционал (10) достигает экстремума. Так как на кривые $y(x)$, образующие множество M, не наложено никаких дополнительных условий, кроме граничных, задача отыскания кривой, на которой функционал (10) достигает экстремума, называется задачей поиска **безусловного** экстремума.

2. Необходимое условие экстремума. Обозначим через $y_0(x)$ кривую, на которой достигается экстремум функционала (10). Рассмотрим допустимую кривую, определяемую соотношением

$$y(x) = y_0(x) + \alpha\delta y,$$

где $\delta y \in C^1\left[x_0,\, x_1\right]$ - фиксированная вариация кривой, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$, α - числовой параметр. Тогда функционал $V[y(x)]$ на допустимой кривой принимает вид

$$V[y_0(x) + \alpha\delta y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + \alpha\delta y, y'(x) + \alpha\delta y')dx = \varphi(\alpha),$$

где $\varphi(\alpha)$ - функция числового параметра α .

Используя определение 6* вариации функционала, получим

$$\delta V[y_0(x)] = \varphi'(0) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + \alpha\delta y, y_0'(x) + \alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\Big[F_y(x, y_0(x) + \alpha\delta y, y_0'(x) + \alpha\delta y')\Big|_{\alpha=0}\delta y + F_{y'}(x, y_0(x) + \alpha\delta y, y_0'(x) + \alpha\delta y')\Big|_{\alpha=0}\delta y'\Big]dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\Big[F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y + F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y'\Big]dx.$$

В силу необходимого условия экстремума функционала справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $y_0(x)$ из класса M доставляла минимум (максимум) функционалу (10), необходимо, чтобы*

$$\delta V[y_0(x)] = \int_{x_0}^{x_1}[F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y + F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y']dx = 0 \tag{11}$$

для любой функции $\delta y \in C^1[x_0, x_1]$, *для которой* $\delta y(x_0) = 0,\ \delta y(x_1) = 0$.

3. Преобразования Лагранжа и Дю-Буа-Реймонда. Под знаком интеграла в выражении первой вариации (11) имеем линейную функцию от δy и $\delta y'$. Интегрируя по частям, можно преобразовать вариацию $\delta V[y_0(x)]$ так, чтобы под знаком интеграла была линейная функция только от δy (так называемое преобразование Лагранжа) или $\delta y'$ (преобразование Дю-Буа-Реймонда).

Преобразование Лагранжа производится следующим образом: интегрируем в (11) второе слагаемое по частям

$$\begin{bmatrix} u = F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)), & du = \dfrac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))dx, \\ dv = \delta y' dx = (\delta y)' dx, & v = \delta y \end{bmatrix},$$

тогда

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y' dx = F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y dx =$$

$$= -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'}'(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y dx.$$

Следовательно,

$$\delta V[y_0(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y'(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}'(x, y_0(x), y_0'(x)) \right] \delta y dx. \tag{12}$$

Заметим, что мы считали, что функция $y_0(x)$ обладает непрерывной производной. Однако функцию $y_0'(x)$ мы не считали дифференцируемой, поэтому преобразование Лагранжа a priori незаконно, так как функция $F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ возможно не является дифференцируемой.

Чтобы устранить добавочную гипотезу о существовании второй производной $y_0''(x)$, Дю-Буа-Реймонд дал другое преобразование вариации. Именно, обозначая

$$N(x) = \int_{x_0}^{x} F_y(s, y_0(s), y_0'(s))ds,$$

имеем

$$\delta V[y_0(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dN(x)}{dx} \delta y + F_{y'}'(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y' \right] dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое

$$\begin{bmatrix} u = \delta y, & du = (\delta y)' dx = \delta y' dx, \\ dv = \dfrac{dN(x)}{dx} dx, & v = N(x) \end{bmatrix},$$

получаем

$$\delta V[y_0(x)] = N(x)\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} N(x)\delta y' dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y' dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) - N(x)]\delta y' dx. \tag{13}$$

Это преобразование не требует дополнительных гипотез о структуре функции $y_0(x)$.

4. Основные леммы вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Лемма Лагранжа. *Пусть непрерывная функция* $M(x)$ *такова, что для любой функции* $\eta(x)\in C^1[x_0,x_1]$, *обращающейся в нуль в точках* x_0 *и* x_1, *справедливо равенство*

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta(x)dx = 0.$$

Тогда $M(x)\equiv 0$ *на* $[x_0,x_1]$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть в некоторой точке $c\in[x_0,x_1]$ функция $M(c)\neq 0$, например, $M(c)>0$. Отсюда в силу непрерывности $M(x)$ при достаточно большом n можно построить отрезок $\left[\overline{x},\overline{x}+\frac{\pi}{n}\right]\subset[x_0,x_1]$, содержащий точку c, на котором $M(x)$ больше некоторого положительного числа m. Определим функцию $\eta_0(x)$ следующим образом:

$$\eta_0(x)=\begin{cases}\sin^2 n(x-\overline{x}) \text{ при } x\in\left[\overline{x},\overline{x}+\dfrac{\pi}{n}\right],\\[2ex] 0 \text{ при } x\in[x_0,x_1]\setminus\left[\overline{x},\overline{x}+\dfrac{\pi}{n}\right].\end{cases}$$

Функция $\eta_0(x)$ обладает непрерывной производной и, кроме того, $\eta_0(x_0)=\eta_1(x_1)=0.$ Следовательно, мы должны были бы иметь $\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta_0(x)dx=0,$ однако

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta_0(x)dx=\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2 n(x-\overline{x})dx > m\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+\frac{\pi}{n}}\sin^2 n(x-\overline{x})dx=$$

$$=m\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 nsds=\frac{m}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}(1-\cos 2ns)ds=\frac{\pi m}{2n}>0.$$

Итак, гипотеза о том, что $M(x)\neq 0$ в какой-либо точке отрезка $[x_0,x_1],$ ведет к противоречию. Лемма доказана.

Применив эту лемму к вариации

$$\delta V[y_0(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y(x,y_0(x),y_0'(x))-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\right]\delta y dx,$$

которая должна в случае экстремума обращаться в нуль для произвольной непрерывно дифференцируемой функции δy такой, что $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0,$ Лагранж получил

$$F_y(x,y_0(x),y_0'(x))-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\equiv 0 \text{ на } [x_0,x_1].$$

Таким образом, функция $y_0(x)$, дающая экстремум функционалу $V[y(x)],$ является решением дифференциального уравнения

$$F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')=0.$$

Это уравнение называется **уравнением Эйлера** (впервые опубликовано в 1744 году).

Вывод Лагранжа уравнения Эйлера содержит неточность, которую мы отметили при определении преобразования Ланранжа.

Лемма Дю-Буа-Реймонда. *Пусть непрерывная функция* $M(x)$ *такова, что для любой функции* $\eta(x)\in C^1[x_0,x_1]$, *для которой* $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, *справедливо равенство*

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta'(x)dx=0.$$

Тогда $M(x)$ *постоянна на всем отрезке* $[x_0,x_1]$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $M(x)$ не постоянна, тогда на отрезке $[x_0,x_1]$ существует по крайней мере две точки c_1 и c_2, в которых функция $M(x)$ принимает неравные значения, например, $M(c_1)>M(c_2)$. Пусть d_1 и d_2 - пара чисел, удовлетворяющих неравенству $M(c_1)>d_1>d_2>M(c_2)$. При достаточно большом n можно построить пару непересекающихся отрезков $\left[a,a+\frac{\pi}{n}\right]$ и $\left[b,b+\frac{\pi}{n}\right]$, заключенных в отрезке $[x_0,x_1]$ и таких, что в отрезке $\left[a,a+\frac{\pi}{n}\right]$ имеет место неравенство $M(x)>d_1$, а на другом из выбранных отрезков $M(x)<d_2$. Определим функцию $\xi(x)$ следующим образом:

$$\xi(x)=\begin{cases}\sin^2 n(x-a) \ \text{ при } \ x\in\left[a,a+\frac{\pi}{n}\right],\\ -\sin^2 n(x-b) \ \text{ при } \ x\in\left[b,b+\frac{\pi}{n}\right],\\ \quad 0 \ \text{ в остальных точках отрезка } [x_0,x_1].\end{cases}$$

Функция $\eta_0(x)=\int_{x_0}^{x}\xi(s)ds$ обладает непрерывной производной $\xi(x)$ и, кроме того,

$$\eta_0(x_0)=0,$$

$$\eta_0(x_1)=\int_{x_0}^{x_1}\xi(s)ds=\int_a^{a+\frac{\pi}{n}}\sin^2 n(x-a)dx-\int_b^{b+\frac{\pi}{n}}\sin^2 n(x-b)dx=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 nsds-\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 nsds=0.$$

Следовательно, функция $\eta_0(x)$ удовлетворяет условиям леммы, а значит должно выполняться равенство

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta_0'(x)dx=0.$$

Но, с другой стороны,

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta_0'(x)dx=\int_a^{a+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2 n(x-a)dx-\int_b^{b+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2 n(x-b)dx>(d_1-d_2)\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 nsds=$$

$$=\frac{d_1-d_2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}(1-\cos 2nx)dx=\frac{\pi(d_1-d_2)}{2n}>0.$$

Итак, предположение, что функция $M(x)$ не постоянна, приводит к противоречию. Лемма доказана.

На основании леммы Дю-Буа-Реймонда из (11) и (13) на отрезке $[x_0,x_1]$ получаем

$$F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) - N(x) \equiv c -$$
интегральная форма уравнения Эйлера.

Функция $N(x) = \int\limits_{x_0}^{x} F_y(s, y_0(s), y_0'(s))ds$ обладает на $[x_0, x_1]$ непрерывной производной $N'(x) = F_y(x, y_0(x), y_0'(x))$. Следовательно, обладает непрерывной производной по x также функция $F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = c + N(x)$:

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = N'(x) = F_y(x, y_0(x), y_0'(x)),$$

откуда

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \equiv 0 \text{ на } [x_0, x_1].$$

Итак, мы получили, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, доказав при этом дифференцируемость функции $F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$, т.е. обосновав преобразование Лагранжа.

Покажем теперь, что $y_0''(x)$ существует и непрерывна во всякой точке кривой, в которой $F_{y'y'} \neq 0$.

Пусть в некоторой точке (x, y) кривой $y = y_0(x)$ имеем $F_{y'y'} \neq 0$. При переходе от точки с абсциссой x этой кривой к точке с абсциссой $x + \Delta x$ функции $y_0(x)$ и $y_0'(x)$ получают приращения Δy и $\Delta y'$, которые вследствие непрерывности функций $y_0(x)$ и $y_0'(x)$ стремятся к нулю вместе с Δx. Имеем

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\overline{F}_{xy'} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{yy'} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} \right),$$

где вторые производные $\overline{F}_{xy'}$, $\overline{F}_{yy'}$, $\overline{F}_{y'y'}$ (с чертами наверху) означают значения этих функций при аргументах

$$x + \theta_1 \Delta x, y_0(x) + \theta_2 \Delta y, y_0'(x) + \theta_3 \Delta y', \text{ где } |\theta_i| < 1, i = \overline{1,3}.$$

При $\Delta x \to 0$ эти производные стремятся соответственно к $F_{xy'}(x, y_0(x), y_0'(x))$, $F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x))$, $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = F_{xy'}(x, y_0(x), y_0'(x)) + F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x)) y_0'(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x)),$$

отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) - F_{xy'}(x, y_0(x), y_0'(x)) - F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x)) y_0'(x)}{F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x))}.$$

Итак, $y_0''(x)$ существует и непрерывна во всякой точке кривой $y = y_0(x)$, в которой $F_{y'y'} \neq 0$. Точки кривой $y = y_0(x)$, в которых $F_{y'y'} \neq 0$, называются **регулярными**.

Мы можем теперь полностью сформулировать доказанную теорему.

Теорема 2. *Если функция $y_0(x)$ класса М дает экстремум функционалу (10), то функция $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y') = 0$$

и $y_0''(x)$ *существует и непрерывна во всех точках* $x,$ *для которых* $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0(x)) \neq 0.$

Уравнение Эйлера в развернутом виде имеет вид:

$$F_y(x,y,y') - F_{xy'}(x,y,y') - F_{yy'}(x,y,y')y' - F_{y'y'}(x,y,y')y'' = 0,$$

т.е. является дифференциальным уравнением второго порядка при $F_{y'y'} \neq 0$.

Интегральные кривые $y = y(x, c_1, c_2)$ уравнения Эйлера называются **экстремалями**. Только на экстремалях может достигаться экстремум функционала (10).

Для нахождения кривой, реализующей экстремум функционала (10), интегрируем уравнение Эйлера и определяем обе постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, из условий на границе $y(x_0) = y_0,$ $y(x_1) = y_1.$ Только на удовлетворяющих этим условиям экстремалях может реализовываться экстремум функционала. Однако для того, чтобы установить, реализуется ли на них в действительности экстремум, и притом максимум или минимум, надо воспользоваться достаточными условиями экстремума.

Напомним, что краевая задача

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y') = 0, \ \ y(x_0) = y_0, \ \ y(x_1) = y_1$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Отметим, что во многих вариационных задачах существование решения очевидно из физического или геометрического смысла задачи, и если решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, единственно, то эта единственная экстремаль и будет решением рассматриваемой вариационной задачи.

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$V[y(x)] = \int_{-1}^{1} \left(y'^2(x) + 4y^2(x) - 8xy(x) + 2x^2 \right) dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(-1) = 3,$ $y(1) = 1.$

Составим уравнение Эйлера. Так как $F = y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2$, то $F_y = -8x + 8y,$ $F_{y'} = 2y',$ $\frac{d}{dx} F_{y'} = 2y'',$ получаем

$$-8x + 8y - 2y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - 4y = -4x.$$

Найдем общее решение этого уравнения.

Определим решение однородного уравнения $y'' - 4y = 0.$ Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4 = 0$ действительные различные: $\lambda_1 = -2,$ $\lambda_2 = 2.$ Поэтому $y_{oo}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}.$

Подберем частное решение неоднородного уравнения в виде $y_ч(x) = Ax + B,$ тогда $y_ч'(x) = A,$ $y_ч''(x) = 0.$ Подставляя в неоднородное уравнение, получаем $-4(Ax + B) = -4x,$ откуда $A = 1,$ $B = 0.$ Поэтому $y_ч(x) = x.$ Тогда общее решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения неоднородного и общего решения однородного уравнения:

$$y(x) = x + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}.$$

Определим постоянные c_1 и c_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} -1 + c_1 e^2 + c_2 e^{-2} = 3, \\ 1 + c_1 e^{-2} + c_2 e^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 e^2 + c_2 e^{-2} = 4, \\ c_1 = -c_2 e^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c_2 e^6 + c_2 e^{-2} = 4, \\ c_1 = -c_2 e^4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2\left(e^{-2}-e^{6}\right)=4, \\ c_1=-c_2e^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2=-\dfrac{4e^2}{e^8-1}, \\ c_1=\dfrac{4e^6}{e^8-1}. \end{cases}$$

В результате получаем экстремаль $y_0(x)=x+\dfrac{4e^6}{e^8-1}e^{-2x}-\dfrac{4e^2}{e^8-1}e^{2x}$.

Пример 2. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y'^2(x)-y^2(x)\right)dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0.$

Составим уравнение Эйлера. Так как $F=y'^2-y^2,\ F_y=-2y,\ F_{y'}=2y',\ \dfrac{d}{dx}F_{y'}=2y''$, получаем $-2y-2y''=0$ или $y''+y=0.$

Найдем общее решение этого уравнения. Поскольку оно является однородным с постоянными коэффициентами, то составим характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0.$ Его корни $\lambda_{1,2}=\pm i$ - комплексно сопряженные. Поэтому решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

Определим постоянные c_1 и c_2 из граничных условий:

$$c_1=1,\ c_2=0.$$

Отсюда получаем экстремаль $y_0(x)=\cos x.$

5. Частные случаи уравнения Эйлера. Заметим, что уравнение Эйлера не всегда интегрируется в квадратурах. Поэтому важно выявить такие случаи, когда интегрирование в квадратурах возможно. Рассмотрим некоторые из них.

Случай 1. F не зависит от y': $F=F(x,y).$

Уравнение Эйлера имеет вид $F_y(x,y)=0,$ так как $F_{y'}\equiv 0.$ Решение полученного не дифференциального уравнения не содержит элементов произвола, поэтому, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1.$

Следовательно, решение рассматриваемой вариационной задачи, вообще говоря, не существует. Лишь в исключительных случаях, когда кривая, определяемая уравнением $F_y(x,y)=0,$ проходит через граничные точки (x_0,y_0) и $(x_1,y_1),$ существует функция, на которой может достигаться экстремум функционала.

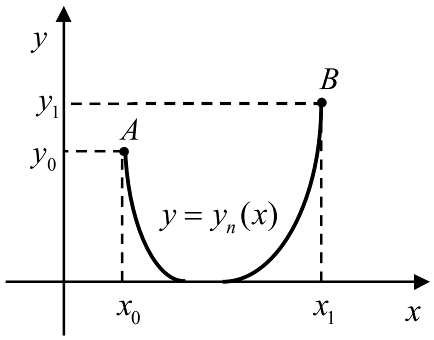
Пример 3. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y^2(x)+2xy(x)\right)dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1.$

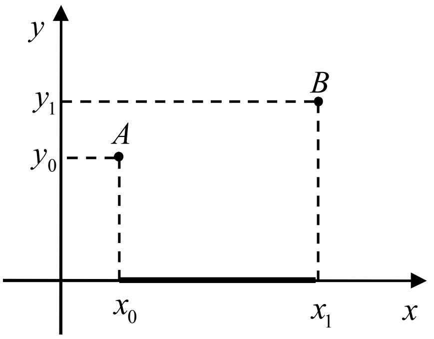
Составим уравнение Эйлера и решим его. Уравнение имеет вид: $F_y=2y+2x=0$, откуда $y(x)=-x.$ Задача имеет решение, если найденная прямая проходит через граничные точки, т.е. при $y_0=-x_0,\ y_1=-x_1.$

Пример 4. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}y^2(x)dx,$ удовлетворяющую граничным условиям $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$.

Уравнение Эйлера имеет вид $2y = 0$ или $y = 0$. Экстремаль $y(x) \equiv 0$ проходит через граничные точки только при $y_0 = y_1 = 0$.

Если $y_0 = 0$ и $y_1 = 0$, то, очевидно, функция $y(x) \equiv 0$ реализует минимум функционала $V[y(x)]$, так как $V[y(x)] \geq 0$, причем $V[y(x)] = 0$ при $y(x) \equiv 0$.





Если же хотя бы одно из значений y_0 или y_1 не равно нулю, то минимум функционала на непрерывных функциях не достигается, что и понятно, так как можно выбрать последовательность непрерывных функций $y_n(x)$, графики которых состоят из все более и более круто спускающейся из точки (x_0, y_0) к оси абсцисс дуги кривой, затем из отрезка оси абсцисс, почти совпадающего со всем промежутком (x_0, x_1), и, наконец, возле точки x_1 круто поднимающейся к точке (x_1, y_1) дуги кривой. Очевидно, что на кривых такой последовательности значения функционала сколь угодно мало отличаются от нуля и, следовательно, нижняя грань значений функционала равна нулю, однако, эта нижняя грань не может достигаться на непрерывной кривой, так как для любой непрерывной кривой $y = y(x)$, отличной от тождественного нуля, интеграл $\int_{x_0}^{x_1} y^2(x)dx > 0$. Эта грань значений функционала достигается на разрывной функции

$$\overline{y}(x) = \begin{cases} y_0 & \text{при} \quad x = x_0, \\ 0 & \text{при} \quad x \in (x_0, x_1), \\ y_1 & \text{при} \quad x = x_1. \end{cases}$$

Случай 2. F линейно зависит от y': $F = M(x, y) + N(x, y)y'$.

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} N(x, y) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} y' - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} y' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0,$$

но это, как и в предыдущем случае, не дифференциальное уравнение. Кривая, определяемая уравнением $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0$, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, следовательно, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе непрерывных функций.

Если же $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} \equiv 0$, то выражение $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$ и

$$V[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left[M(x,y(x))+N(x,y(x))\frac{dy}{dx}\right]dx=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}M(x,y)dx+N(x,y)dy=$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}dU(x,y)=U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0),$$

значение функционала $V[y(x)]$ постоянно на допустимых кривых. Вариационная задача теряет смысл.

Пример 5. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int_0^1\left(2y^3(x)+3x^2y'(x)\right)dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0,\ y(1)=y_1$.

Уравнение Эйлера принимает вид $6y^2-6x=0$ или $y^2=x$.

Граничное условие $y(0)=0$ удовлетворяется, а условие $y(1)=y_1$ выполняется при $y_1^2=1$. Таким образом, экстремаль существует только тогда, когда $y_1=1$ $(y_0(x)=\sqrt{x})$ или $y_1=-1$ $(y_0(x)=-\sqrt{x})$.

Пример 6. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int_0^1(y^2(x)+x^2y'(x))dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0,\ y(1)=a$.

Уравнение Эйлера имеет вид $2y-2x=0$, откуда $y(x)=x$.

Первое граничное условие $y(0)=0$ удовлетворяется, но второе граничное условие удовлетворяется лишь при $a=1$. Если же $a\neq1$, то экстремали, удовлетворяющей граничным условиям, не существует.

Пример 7. Найти экстремаль функционала

$$V[y(x)]=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(y^2(x)\cos x+2y(x)y'(x)\sin x\right)dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$

В данном случае $M(x,y)=y^2\cos x,\ N(x,y)=2y\sin x.$ Так как $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y\cos x$, $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2y\cos x$, то $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Выражение под знаком интеграла является полным дифференциалом функции $U(x,y)=y^2\sin x$. Величина функционала не зависит от пути интегрирования, а вариационная задача не имеет смысла. Значение функционала равно

$$V[y(x)]=\int_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}y^2(x)\cos x dx+2y(x)\sin x dy=\int_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}d\left(y^2\sin x\right)=y^2\sin x\Bigg|_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

Пример 8. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y(x)+xy'(x))dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$.

Уравнение Эйлера превращается в тождество $1-1\equiv0$. Подынтегральное выражение является полным дифференциалом (интеграл не зависит от пути интегрирования) и

$$V[y(x)]=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}(ydx+xdy)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}d(xy)=x_1y_1-x_0y_0$$
по какой бы кривой мы не интегрировали. Вариационная задача не имеет смысла.

Случай 3. F зависит лишь от y': $F=F(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид $F_{y'y'}y''=0$, так как $F_y=F_{xy'}=F_{yy'}=0$. Отсюда либо $y''=0$ либо $F_{y'y'}=0$. Если $y''=0$, то $y=c_1x+c_2$ - двухпараметрическое семейство прямых линий. Если же уравнение $F_{y'y'}(y')=0$ имеет один или несколько действительных корней $y'=k_i$, то $y=k_ix+c$ и мы получаем однопараметрическое семейство прямых линий, содержащееся в полученном выше двухпараметрическом семействе $y=c_1x+c_2$.

Таким образом, в случае $F=F(y')$ экстремалями являются всевозможные прямые линии $y=c_1x+c_2$.

Пример 9. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int_1^3\sqrt{1+y'^2(x)}dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(1)=2$, $y(3)=0$.

Общее решение уравнения Эйлера имеет вид: $y=c_1x+c_2$. Определим коэффициенты c_1 и c_2 из граничных условий:

$$\begin{cases}c_1+c_2=2,\\3c_1+c_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $c_1=-1$, $c_2=3$. В результате получаем экстремаль $y_0(x)=-x+3$.

Случай 4. F зависит лишь от x и y': $F=F(x,y')$.

Уравнение Эйлера приобретает вид $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$ и, следовательно, имеет первый интеграл $F_{y'}(x,y')=c_1$, причем так как полученное уравнение первого порядка не содержит y, то уравнение может быть проинтегрировано непосредственным разрешением относительно y' и интегрированием или введением подходящим образом выбранного параметра.

Пример 10. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int_1^2\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{x}dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(1)=3+\sqrt{3}$, $y(2)=3$.

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F_{y'}=\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=c_1.$$

Найдем общее решения уравнения Эйлера. Имеем $x=\frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}}$, где $c=\frac{1}{c_1}$.

Сделаем подстановку $y'=\frac{dy}{dx}=tgp$: $x=\frac{c\cdot tgp}{\frac{1}{\cos p}}=c\sin p$. Найдем дифференциал: $dx=c\cos pdp$. С учетом равенства $dy=tgp\,dx$ получаем $dy=tgp\cdot c\cdot\cos pdp=c\sin pdp$. Интегрируя, получим $y=-c\cos p+c_2$.

Из системы

$$x = c\sin p,\ \ y - c_2 = -c\cos p,$$

возводя в квадрат каждое уравнение и складывая, находим $x^2 + \left(y - c_2\right)^2 = c^2$ - общий интеграл уравнения Эйлера.

Определим постоянные c и c_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} 1 + \left(3 + \sqrt{3} - c_2\right)^2 = c^2, \\ 4 + \left(3 - c_2\right)^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 + c_2^2 + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}c_2 - 6c_2 = 13 - 6c_2 + c_2^2, \\ 4 + \left(3 - c_2\right)^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 3, \\ c^2 = 4. \end{cases}$$

В результате получаем экстремаль $x^2 + \left(y - 3\right)^2 = 4.$ Так как $y(1) = 3 + \sqrt{3},$ экстремум может достигаться лишь на кривой $y_0(x) = 3 + \sqrt{4 - x^2}.$

Пример 11. Найти экстремаль функционала

$$V[y(x)] = \int_0^2 \left(y'^2(x) - 4y'(x)e^{2x} + \sin^2 x\right)dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 1,\ y(2) = -2.$

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F_{y'} = 2y' - 4e^{2x} = c_1,$ откуда

$$y' = \frac{c_1}{2} + 2e^{2x}.$$

Интегрируя, получаем

$$y = \frac{c_1}{2}x + e^{2x} + c_2.$$

Определим постоянные c_1 и c_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} 1 + c_2 = 1, \\ c_1 + e^4 + c_2 = -2. \end{cases}$$

Отсюда $c_1 = -2 - e^4,\ c_2 = 0.$ В результате получаем экстремаль

$$y_0(x) = e^{2x} - \frac{(2 + e^4)x}{2} + 1.$$

Случай 5. F зависит лишь от y и y': $F = F(y, y').$

Уравнение Эйлера имеет вид $F_y(y, y') - F_{yy'}(y, y')y' - F_{y'y'}(y, y')y'' = 0,$ так как $F_{xy'} = 0.$ Если умножить почленно это уравнение на $y',$ то левая часть превращается в точную производную $\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}).$

Действительно,

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = F_y y' + F_{y'}y'' - y''F_{y'} - y'^2 F_{yy'} - y'y''F_{y'y'} = y'\left(F_y - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'}\right).$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - y'F_{y'} = c_1,$$

причем, так как это уравнение первого порядка не содержит явно $x,$ оно может быть проинтегрировано, разрешая относительно y' и разделяя переменные или используя метод введения параметра.

Пример 12. Найти экстремаль функционала $V[y(x)] = \int_0^1 y(x)y'^2(x)dx,$ удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 1,\ y(1) = \sqrt[3]{4}.$

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл $yy'^2 - 2yy'^2 = c_1$ или

$yy'^2 = c,$ где $c = -c_1.$

Найдем общее решение уравнения Эйлера. Введем подстановку $y' = \dfrac{dy}{dx} = p.$ Тогда уравнение $yy'^2 = c$ имеет вид $yp^2 = c.$ Отсюда $y = \dfrac{c}{p^2}.$ Найдем дифференциал dy: $dy = -\dfrac{2c}{p^3}dp.$ Тогда $dx = \dfrac{dy}{p} = -\dfrac{2c}{p^4}dp.$ Отсюда $x = \dfrac{2}{3}\dfrac{c}{p^3} + c_2,$ $p^3 = \dfrac{2}{3}\dfrac{c}{(x-c_2)}.$ Так как $y = \dfrac{c}{p^2}$, то

$$y(x) = \frac{c}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\dfrac{c}{(x-c_2)}\right)^2}} = c\sqrt[3]{\frac{9}{4}\frac{(x-c_2)^2}{c^2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}(x-c_2)^2 c}$$ - общее решение.

Определим постоянные c и c_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}c_2^2 c} = 1, \\ \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}(1-c_2)^2 c} = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{4}c_2^2 c = 1, \\ \dfrac{9}{4}(1-c_2)^2 c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{4}{9c_2^2}, \\ \dfrac{(1-c_2)^2}{c_2^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{4}{9c_2^2}, \\ 3c_2^2 + 2c_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Окончательно имеем: $c_2 = -1,$ $c = \dfrac{4}{9}$ или $c_2 = \dfrac{1}{3},$ $c = 4.$

В результате получаем две экстремали: $y_0(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ и $y_0(x) = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$.

Пример 13. Найти экстремаль функционала $V[y(x)] = \displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{y(x)}dx,$ удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 4,$ $y(2) = 2.$

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \text{ или } \frac{1+y'^2-y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1,$$

откуда

$$y = \frac{c}{\sqrt{1+y'^2}}, \; c = \frac{1}{c_1}.$$

Введем подстановку $y' = \operatorname{tg} p,$ тогда $y = c\cos p.$ Найдем дифференциал dy: $dy = -c\sin p dp,$ тогда $\operatorname{tg} p dx = -c\sin p dp$ или $dx = -c\cos p dp,$ откуда $x = -c\sin p + c_2.$ Исключая параметр $p,$ получаем семейство экстремалей

$$(x-c_2)^2 + y^2 = c^2.$$

Определим постоянные $\tilde{n}$ и c_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} c_2^2 + 16 = c^2, \\ (2-c_2)^2 + 4 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 = 20, \\ c_2 = -2. \end{cases}$$

Следовательно, учитывая, что $y(2) = 2,$ получаем экстремаль $y_0(x) = \sqrt{16 - x^2 - 4x}.$

Пример 14 (задача о брахистохроне). Найти экстремаль функционала $T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}} dx,$ удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 0,$ $y(x_1) = y_1$.

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = c_1$ или в данном случае:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \Rightarrow \frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \Rightarrow \sqrt{y(1+y'^2)} = \frac{1}{c_1} \Rightarrow$$

$$y(1+y'^2) = c, \quad \text{где} \quad c = \frac{1}{c_1^2}.$$

Введем параметр p, полагая $y' = ctgp$, тогда получим

$$y = \frac{c}{1+y^2} = \frac{c}{1+ctg^2 p} = c\sin^2 p = \frac{c}{2}(1-\cos 2p),$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c\sin 2p}{ctgp}dp = 2c\sin^2 p dp = c(1-\cos 2p)dp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = c\left(p - \frac{\sin 2p}{2}\right) + c_2 = \frac{c}{2}(2p - \sin 2p) + c_2.$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид

$$x = \frac{c}{2}(2p - \sin 2p) + c_2, \quad y = \frac{c}{2}(1-\cos 2p)$$

Если преобразовать параметр подстановкой $p_1 = 2p$ и принять во внимание, что кривая проходит через точку $(0,0)$ (т.е. $c_2 = 0$), то мы получим уравнение семейства циклоид в обычной форме

$$x = \tilde{c}(p_1 - \sin p_1), \quad y = \tilde{c}(1-\cos p_1),$$

где $\tilde{c} = \frac{c}{2}$ - радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения через точку $B(x_1, y_1)$. Итак, брахистохроной является дуга циклоиды.

Замечание. Часто непосредственное применение уравнения Эйлера оказывается проще использования первых интегралов.

Пример 15. Найдем экстремали функционала из примера 2, воспользовавшись частным случаем вида подынтегральной функции. Уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = c_1$ или в данном случае

$$y'^2 - y^2 - 2y'^2 = c_1 \quad \Rightarrow \quad y'^2 + y^2 = c^2, \quad \text{где} \quad c^2 = c_1.$$

Разрешая относительно y', разделяя переменные и интегрируя, получим

$$y' = \pm\sqrt{c^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad \arcsin\frac{y}{c} = \pm x + c_2 \quad \Rightarrow$$

$$y = c\sin(\pm x + c_2) \quad \Rightarrow \quad y = \tilde{c}_1 \sin x + \tilde{c}_2 \cos x.$$

Кроме того, уравнение $y'^2 + y^2 = c^2$ имеет решение $y = const,$ которое не является решением уравнения Эйлера (см. пример 2), а приобретено в результате умножения на y' при нахождении первого интеграла.

6. Вторая вариация. Условия Лежандра и Якоби. В случае функции одного или нескольких переменных при обращении в нуль первого дифференциала для исследования знака приращения функции следует обратиться ко второму дифференциалу. Исследование второго дифференциала дает нам дополнительные необходимые условия для максимума и минимума (позволяющие, в частности, различать случай максимума от случая минимума), а также достаточные условия максимума или минимума. Аналогично поступают в случае функционалов.

Пусть задан функционал $V[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))dx$ на кривых класса M. Рассмотрим допустимую кривую $y(x)=y_0(x)+\delta y$, где $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$, и найдем приращение функционала $V[y(x)]$ при переходе от кривой $y_0(x)$, на которой реализуется экстремум, к допустимой кривой $y(x)$. Для этого разложим подынтегральную функцию $F(x,y,y')$ в ряд Тейлора в точке $(x,y_0(x),y_0'(x))$:

$$V[y(x)]-V[y_0(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_y(x,y_0(x),y_0'(x))\delta y+F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\delta y'\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\overline{F}_{yy}(\delta y)^2+2\overline{F}_{yy'}\delta y\delta y'+\overline{F}_{y'y'}(\delta y')^2\right)dx, \tag{14}$$

где

$$\overline{F}_{yy}=F_{yy}(x,y_0(x)+\theta_1\delta y,y_0'(x)+\theta_2\delta y'),\ \overline{F}_{yy'}=F_{yy'}(x,y_0(x)+\theta_1\delta y,y_0'(x)+\theta_2\delta y'),$$

$$\overline{F}_{y'y'}=F_{y'y'}(x,y_0(x)+\theta_1\delta y,y_0'(x)+\theta_2\delta y'),\ |\theta_1|<1,\ |\theta_2|<1.$$

При достаточно малых δy и $\delta y'$ имеем

$$\overline{F}_{yy}=F_{yy}(x,y_0(x),y_0'(x))+\varepsilon_1,\ \overline{F}_{yy'}=F_{yy'}(x,y_0(x),y_0'(x))+\varepsilon_2,\ \overline{F}_{y'y'}=F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x))+\varepsilon_3,$$

где $\max\limits_{i=1,3}|\varepsilon_i|$ стремится к нулю, когда $\|\delta y\|_{C^1[x_0,x_1]}$ стремится к нулю.

Следовательно,

$$V[y(x)]-V[y_0(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_y(x,y_0(x),y_0'(x))\delta y+F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\delta y'\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_{yy}(x,y_0(x),y_0'(x))(\delta y)^2+2F_{yy'}(x,y_0(x),y_0'(x))\delta y\delta y'+F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x))(\delta y')^2\right)dx+\varepsilon,$$

где $\varepsilon=\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\varepsilon_1(\delta y)^2+2\varepsilon_2\delta y\delta y'+\varepsilon_3(\delta y')^2\right)dx$ - величина более высокого порядка малости, чем $\|\delta y\|^2$, при $\|\delta y\|\to 0$.

Определение 1. *Выражение*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_{yy}(x,y_0(x),y_0'(x))(\delta y)^2+2F_{yy'}(x,y_0(x),y_0'(x))\delta y\delta y'+F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x))(\delta y')^2\right)dx \tag{15}$$

*называется **второй вариацией** функционала* $V[y_0(x)]$ *и обозначается* $\delta^2V[y_0(x)]$.

Таким образом,

$$\Delta V[y_0(x)]=\delta V[y_0(x)]+\frac{1}{2}\delta^2V[y_0(x)]+\varepsilon. \tag{16}$$

Теорема 1. *Если функция* $y=y_0(x)$ *из класса* M *реализует минимум (максимум), функционала* $V[y(x)]$, *то для любой функции* $\delta y\in C^1[x_0,x_1]$, *удовлетворяющей нулевым граничным условиям* $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$, *вторая вариация* $\delta^2V[y_0(x)]$ *неотрицательна (соответственно неположительна).*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай минимума. Предположим противное: для некоторой функции δy имеет место неравенство $\delta^2V[y_0(x)]<0$. Рассмотрим семейство функций $y_0(x)+\alpha\delta y$. Тогда

$$V\left[y_0(x)+\alpha\delta y\right]-V\left[y_0(x)\right]=\alpha\delta V[y_0(x)]+\frac{1}{2}\alpha^2\delta^2 V[y_0(x)]+\varepsilon,$$

где ε - величина более высокого порядка малости по сравнению с α^2 при $\alpha\to 0$. Так как по условию кривая $y=y_0(x)$ реализует минимум функционала $V[y(x)]$, то $\delta V[y_0(x)]=0$ и, следовательно, знак правой части при достаточно малых α совпадает со знаком $\delta^2 V[y_0(x)]$, т.е.

$$V\left[y_0(x)+\alpha\delta y\right]-V\left[y_0(x)\right]<0,$$

что противоречит определению минимума. Теорема доказана.

Установим несколько необходимых условий неотрицательности (неположительности) квадратичного функционала

$$\delta^2 V[y_0(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[M(x)(\delta y)^2+2N(x)\delta y\delta y'+P(x)(\delta y')^2 dx]=W[\delta y], \tag{17}$$

где $M(x)=F_{yy}(x,y_0(x),y_0'(x)),\ N(x)=F_{yy'}(x,y_0(x),y_0'(x)),\ P(x)=F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x)).$

I. Условие Лежандра.

Теорема 2. *Для того, чтобы квадратичный функционал (17) был неотрицательным (неположительным) для любой функции* δy *класса* $C^1[x_0,x_1]$, *для которой* $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$, *необходимо, чтобы на отрезке* $[x_0,x_1]$ *выполнялось неравенство*

$$P(x)\ge 0\ \left(P(x)\le 0\right). \tag{18}$$

<u>Доказательство.</u> Допустим, что для некоторого $\bar{x}\in[x_0,x_1]$ имеем $P(\bar{x})=-2p, p>0$. В таком случае, в силу непрерывности функции $P(x)$, на некотором сегменте $\left[a,a+\frac{\pi}{n}\right]\subset[x_0,x_1]$, содержащем точку $\bar{x}$, выполняется неравенство $P(x)<-p$.

Обозначим через $m=\max\left\{\max\limits_{x\in[x_0,x_1]}|M(x)|,\max\limits_{x\in[x_0,x_1]}|N(x)|\right\}$ и рассмотрим функцию δy:

$$\delta y=\begin{cases}\sin^2 n(x-a)\ \text{ при } x\in\left[a,a+\frac{\pi}{n}\right],\\ 0\quad\text{при } x\in[x_0,x_1]\backslash\left[a,a+\frac{\pi}{n}\right].\end{cases} \tag{19}$$

Функция δy принадлежит классу $C^1[x_0,x_1]$, обращается в нуль на концах отрезка $[x_0,x_1]$ и

$$\int_{x_0}^{x_1}[M(x)(\delta y)^2+2N(x)\delta y\delta y'+P(x)(\delta y')^2 dx]=$$

$$=\int_a^{a+\frac{\pi}{n}}\left[M(x)\sin^4 n(x-a)+2nN(x)\sin^2 n(x-a)\sin 2n(x-a)+P(x)n^2\sin^2 2n(x-a)\right]dx<$$

$$<\frac{\pi m}{n}+2\pi m-p\pi n.$$

При достаточно малом n выражение $\frac{\pi m}{n}+2\pi m-p\pi n$ становится отрицательным. Выбрав соответственно n и подставив его в (19), получим функцию δy, для которой

$$\int_{x_0}^{x_1}[M(x)(\delta y)^2+2N(x)\delta y\delta y'+P(x)(\delta y')^2]dx<0,$$

что противоречит условию теоремы.

Условие Лежандра. *Для того, чтобы на экстремали* $y = y_0(x)$ *достигался минимум (максимум) функционала* $V[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$, *необходимо, чтобы выполнялось неравенство* $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \ge 0$ $\left(F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \le 0 \right)$.

Для доказательства достаточно вспомнить, что необходимым условием минимума (максимума) является неотрицательность (неположительность) второй вариации, и применить только что доказанную теорему.

II. Условие Якоби. Предположим, что функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Тогда выражение второй вариации можно несколько упростить. Так как $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$ и

$$2\int\limits_{x_0}^{x_1} F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y \delta y' dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x)) d(\delta y^2) = F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)^2 \Big|_{x_0}^{x_1} -$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)^2 dx = -\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)^2 dx,$$

то

$$\delta^2 V[y_0(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(Q(x)(\delta y)^2 + P(x)(\delta y')^2 \right) dx = W[\delta y], \tag{20}$$

где

$$Q(x) = F_{yy}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x)), \;\; P(x) = F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)).$$

Запишем для квадратичного функционала $W[\delta y]$ уравнение Эйлера:

$$2Q(x)\delta y - \frac{d}{dx}[2P(x)\delta y'] = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x)\delta y - \frac{d}{dx}[P(x)\delta y'] = 0. \tag{21}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Уравнению (21) и граничным условиям $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$ удовлетворяет, очевидно, функция $\delta y(x) \equiv 0.$ Однако это уравнение может, вообще говоря, иметь и другое решение, удовлетворяющее тем же граничным условиям.

Определение 2. *Точка* $\tilde{x}$ *называется* ***сопряженной с точкой*** x_0, *если уравнение (21) имеет решение, не тождественно равное нулю, обращающееся в нуль при* $x = x_0$ *и при* $x = \tilde{x}$.

Замечание. Если δy - некоторое ненулевое решение уравнения (21), удовлетворяющее условиям $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0,$ то и $c \cdot \delta y,$ где $c = const \ne 0,$ будет также решением. Поэтому мы можем для определенности наложить на δy некоторое условие нормировки, например, $\delta y'(x_0) = 1$ (если $\delta y \not\equiv 0$ и $\delta y(x_0) = 0,$ то $\delta y'(x_0) \ne 0$).

Теорема 3. *Если квадратичный функционал (22) неотрицателен (неположителен) для любой функции* δy *класса* $C^1[x_0, x_1]$, *для которой* $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0,$ *то решение уравнения (21), удовлетворяющее начальным условиям* $\delta y(x_0) = 0,$ $\delta y'(x_0) = 1,$ *не обращается в нуль ни в какой точке интервала* (x_0, x_1).

<u>Доказательство.</u> Если функционал (23) неотрицателен, то квадратичный функционал

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\left(Q(x)(\delta y)^2 + P(x)(\delta y')^2 \right) t + (\delta y')^2 (1-t) \right] dx \tag{24}$$

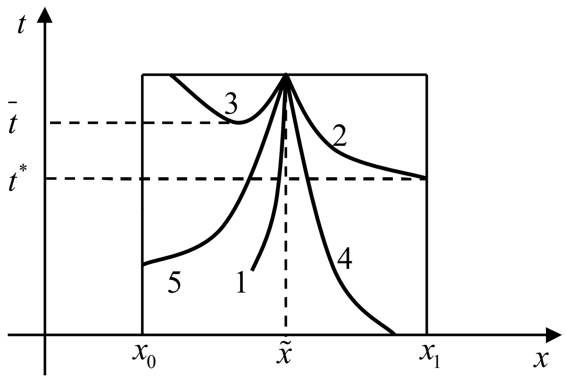
положительно определен при всех t, кроме, может быть, $t=1$. Рассмотрим, далее, отвечающее функционалу (24) уравнение Эйлера

$$tQ(x)\delta y-\frac{d}{dx}\left(\left[tP(x)+(1-t)\right]\delta y'\right)=0 \qquad (25)$$

и пусть $h(x,t)$ – решение этого уравнения такое, что $h(x_0,t)=0,\ h_x(x_0,t)=1$. Это решение представляет собой непрерывную функцию параметра t. При $t=1$ оно переходит в решение δy уравнения (21), удовлетворяющее условиям $\delta y(x_0)=0,\ \delta y'(x_0)=1,$ а при $t=0$ – в удовлетворяющее тем же начальным условиям решение уравнения $(\delta y)''=0,$ т.е. в функцию $h=x-x_0$.

Заметим, что если $h(\bar{x},\bar{t})=0$ в некоторой точке $(\bar{x},\bar{t})$, то в этой точке $h_x(\bar{x},\bar{t})\neq 0$. Действительно, $h(x,t)$ при каждом фиксированном t удовлетворяет уравнению (25), и если бы равенства $h(\bar{x},\bar{t})=0$ и $h_x(\bar{x},\bar{t})=0$ выполнялись одновременно, то в силу теоремы единственности решения для дифференциальных уравнений было бы $h(x,\bar{t})=0$ при всех $x\in[x_0,x_1]$, что невозможно, так как по условию $h_x(x_0,t)=1$ при всех $t\in[0,1]$.

Допустим теперь, что на интервале (x_0,x_1) есть точка, сопряженная с x_0, т.е. функция $h(x,1)$ обращается в нуль в некоторой точке $\tilde{x}$, лежащей в интервале (x_0,x_1).



Рассмотрим совокупность всех точек (x,t), удовлетворяющих условию $h(x,t)=0$. Это некоторая кривая в плоскости (x,t). Действительно, в каждой точке, в которой $h(x,t)=0$, производная $h_x(x,t)$ отлична от нуля и по теореме о неявной функции равенство $h(x,t)=0$ определяет в окрестности каждой такой точки непрерывную функцию $x=x(t)$.

Такая кривая, имея начало в точке $(\tilde{x},1)$:

1) не может окончиться внутри прямоугольника $x_0\le x\le x_1,\ 0\le t\le 1,$ так как это противоречило бы непрерывной зависимости решения $h(x,t)$ от параметра t;

2) не может пересечь сторону $x=x_1, 0\le t<1,$ так как тогда при $t=t^*$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(Q(x)h^2(x,t)+P(x)h_x^{\,2}(x,t)\right)t+(1-t)h_x^{\,2}(x,t)\right]dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[tQ(x)h^2(x,t)+\left(P(x)t+(1-t)\right)h_x^{\,2}(x,t)\right]dx=\begin{bmatrix}u=\left(P(x)t+(1-t)\right)h_x(x,t)\\ dv=h_x(x,t)dx\end{bmatrix}=$$

$$=\left(P(x)t+(1-t)\right)h(x,t)h_x(x,t)\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left[tQ(x)h(x,t)-\frac{d}{dx}\left(\left(P(x)t+(1-t)\right)h_x(x,t)\right)\right]h(x,t)dx=0,$$

что противоречит положительной определенности функционала (24) при всех $t\in[0,1)$;

3) не может пересечь сторону $t=1,\quad x_0\le x\le x_1$, так как тогда при некотором $\bar{t}$ мы получили бы $h(x,\bar{t})=0$ и $h_x(x,\bar{t})=0$ одновременно;

4) не может пересечь сторону $t=0$, $x_0 < x \le x_1$, так как при $t=0$ уравнение (25) сводится к $(\delta y)''=0$, а соответствующим решением является функция $x-x_0$, которая нигде, кроме точки x_0, в нуль не обращается;

5) не может пересечь сторону $x=x_0, 0\le t<1$, так как при некотором $\hat{t}$ было бы $h_x(x_0,\hat{t})=0$, что противоречит определению функции $h(x,t)$.

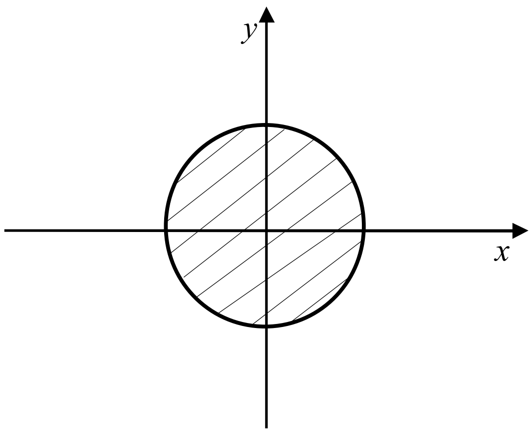
Следовательно, такой кривой вообще не существует. Теорема доказана.

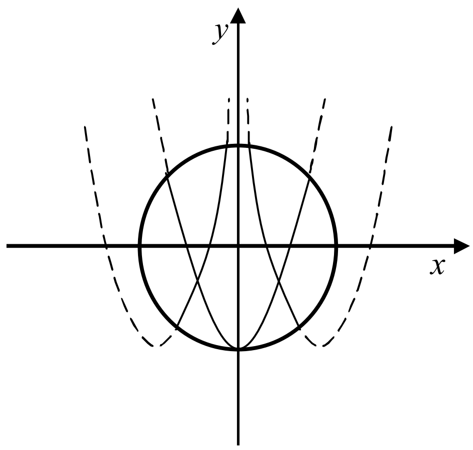
Условие Якоби. *Для того, чтобы экстремаль* $y=y_0(x)$ *доставляла минимум (максимум) функционалу* $V[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))dx$ *необходимо, чтобы интервал* (x_0,x_1) *не содержал точек, сопряженных с* x_0.

Для доказательства достаточно вспомнить, что необходимым условием минимума (максимума) является неотрицательность (неположительность) второй вариации, и применить только что доказанную теорему.

IV. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

1. Поле экстремалей. Условие Якоби. Если на плоскости (x, y) через каждую точку некоторой области D проходит одна и только одна кривая семейства $y = y(x,c)$, то говорят, что это семейство кривых в области D образует **собственное поле.** Угловой коэффициент $p(x, y)$ касательной к кривой семейства $y = y(x,c)$, проходящей через точку (x, y), называется **наклоном поля** в точке (x, y).





Например, внутри круга $x^2 + y^2 \le 1$ параллельные прямые $y = x + c$ образуют собственное поле, причем наклон этого поля $p(x, y) = 1$. Напротив, семейство парабол $y = (x - c)^2 - 1$ внутри того же круга собственное поле не образует, так как внутри этого круга параболы рассматриваемого семейства пересекаются.

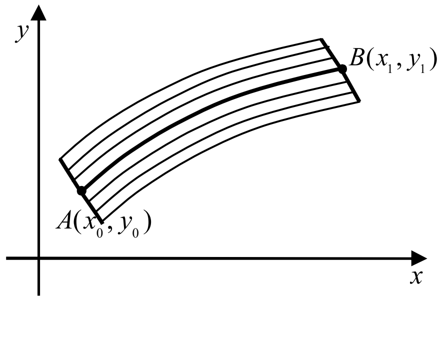
Если все кривые семейства $y = y(x,c)$ проходят через некоторую точку (x_0, y_0), т.е. образуют пучок кривых, то они заведомо не образуют собственное поле в области D, если центр пучка принадлежит области D. Однако, если кривые пучка покрывают всю область D и нигде не пересекаются в этой области, кроме центра пучка, т.е. во всех точках, отличных от центра пучка, требования, налагаемые на собственное поле, выполнены, то говорят, что семейство $y = y(x,c)$ образует **центральное поле.**

Если собственное или центральное поле образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то такое поле называется **полем экстремалей.**

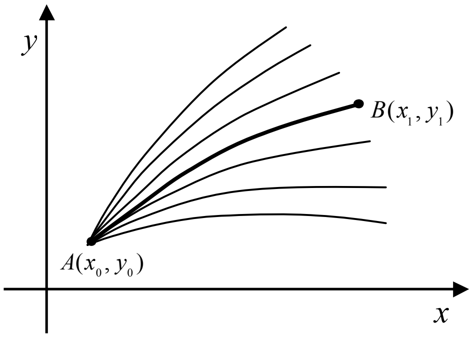
Пусть кривая $y = y(x)$ является экстремалью простейшей вариационной задачи об исследовании на экстремум функционала

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$$

в классе M непрерывно дифференцируемых на отрезке $[x_0, x_1]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.



Говорят, что экстремаль $y = y(x)$ включена в поле экстремалей, если найдено семейство экстремалей $y = y(x,c)$, образующее поле, содержащее при некотором значении $c = c_0$ экстремаль $y = y(x)$, причем эта экстремаль не лежит на границе области D, в которой семейство $y = y(x,c)$ образует поле.



Если пучок экстремалей с центром в точке $A(x_0, y_0)$ в окрестности экстремали $y = y(x)$, проходящей через ту же точку, образует поле, то тем самым найдено центральное поле экстремалей, включающее данную экстремаль. За параметр семейства в данном случае можно взять угловой коэффициент касательной к кривой пучка в точке $A(x_0, y_0)$.

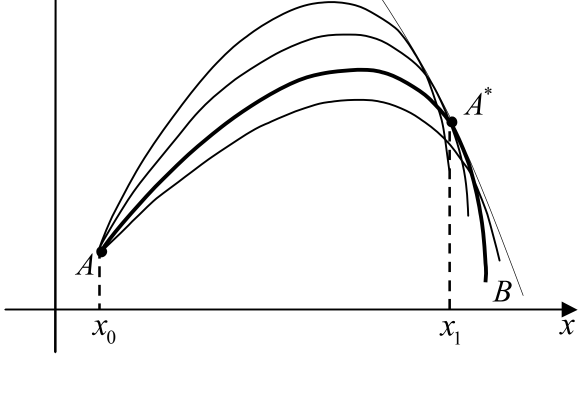
Пример 1. Дан функционал $\int\limits_0^a (y'^2(x) - y^2(x))dx.$ Требуется включить дугу экстремали $y(x) \equiv 0,$ соединяющую точки $(0,0)$ и $(a,0),$ где $0 < a < \pi,$ в центральное поле экстремалей.

Общее решение уравнения Эйлера $-2y - 2y'' = 0$ или $y'' + y = 0$ имеет вид $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$ Из условия прохождения экстремалей через точку $(0,0)$ получаем $c_1 = 0,$ т.е. $y = c_2 \sin x,$ причем кривые этого пучка на отрезке $[0,a],$ $a < \pi$ образуют центральное поле, включающее при $c_2 = 0$ экстремаль $y = 0.$ Параметр семейства c_2 равен производной y' в точке $(0,0)$.

Известно, что две бесконечно близкие кривые семейства $\Phi(x, y, c) = 0$ пересекаются в точках c - дискриминантной кривой, определяемой уравнениями

$$\Phi(x, y, c) = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial c}\Phi(x, y, c) = 0.$$

В состав c - дискриминантной кривой, в частности, входят огибающая семейства и геометрические места кратных точек кривых семейства. Если $\Phi(x, y, c) = 0$ является уравнением пучка кривых, то центр пучка также принадлежит c - дискриминантной кривой. Поэтому если взять пучок экстремалей $y = y(x, c),$ проходящих через точку $(x_0, y_0),$ и определить его c - дискриминантную кривую $\Phi(x, y) = 0,$ то близкие кривые семейства $y = y(x, c)$ будут пересекаться вблизи кривой $\Phi(x, y) = 0$ и, в частности, кривые этого семейства, близкие к рассматриваемой экстремали $y = y(x),$ проходящей через точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, будут пересекаться в точках, близких к точкам касания (или пересечения) кривой $y = y(x)$ с c - дискриминантной кривой.



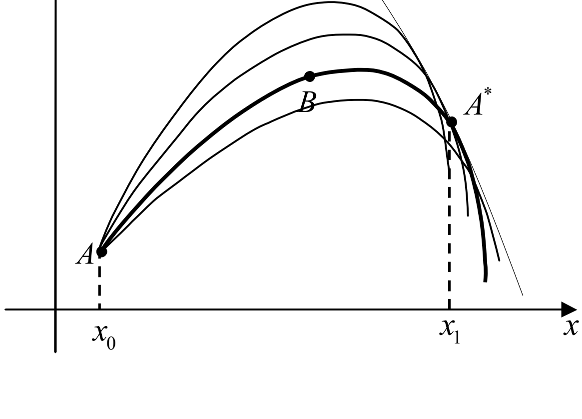


Рис.1. Рис.2.

Если дуга AB экстремали $y = y(x)$ имеет отличную от точки A общую точку A^* с c - дискриминантной кривой пучка $y = y(x,c)$ (рис. 1), то близкие к $y = y(x)$ кривые пучка могут пересекаться между собой и с кривой $y = y(x)$ вблизи точки A^* и, вообще говоря, поля не образуют. Точка A^* называется **точкой, сопряженной с точкой** A.

Если дуга AB экстремали $y = y(x)$ не имеет отличных от точки A общих точек с c - дискриминантной кривой пучка экстремалей, включающего данную экстремаль, то достаточно близкие к дуге AB экстремали пучка не пересекаются, т.е. образуют в окрестности дуги AB центральное поле, включающее эту дугу (рис. 2).

Полученный результат можно сформулировать так: для построения центрального поля экстремалей с центром в точке A, содержащего дугу AB, достаточно, чтобы точка A^*, сопряженная с точкой A, не лежала на дуге AB.

Это условие возможности построения пучка экстремалей, включающего данную экстремаль, носит название **условия Якоби**.

Нетрудно сформулировать это условие и аналитически.

Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно по всем переменным и $y = y(x,c)$ - уравнение пучка экстремалей с центром в точке A, причем параметр c можно для определенности считать совпадающим с угловым коэффициентом y' пучка экстремалей в точке A. Тогда c - дискриминантная кривая определяется уравнениями

$$y = y(x,c),\ \frac{\partial y(x,c)}{\partial c} = 0. \tag{26}$$

Вдоль каждой фиксированной кривой семейства производная $\frac{\partial y(x,c)}{\partial c}$ является функцией только x. Эту функцию обозначим через $u(x)$. Так как $y(x,c)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, то ее смешанные частные производные второго порядка по x и по c совпадают. Отсюда

$$u'(x) = \frac{\partial^2 y(x,c)}{\partial x \partial c} = \frac{\partial^2 y(x,c)}{\partial c \partial x}.$$

Функции $y(x,c)$ являются решениями уравнения Эйлера, поэтому

$$F_y(x, y(x,c), y'_x(x,c)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x,c), y'_x(x,c)) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по c и полагая $\frac{\partial y(x,c)}{\partial c} = u(x)$, получим

$$F_{yy} \cdot u + F_{y'y} \cdot u' - \frac{d}{dx}(F_{yy'} \cdot u + F_{y'y'} \cdot u') \equiv 0$$

или

$$F_{yy} \cdot u + F_{y'y} \cdot u' - \frac{d}{dx}(F_{yy'}) \cdot u - F_{yy'} \cdot u' - \frac{d}{dx}(F_{y'y'} \cdot u') \equiv 0.$$

Так как смешанные частные производные второго порядка по y и по y' совпадают, то имеем

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right) \cdot u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'} \cdot u') \equiv 0 \tag{27}$$

Для нахождения точки, сопряженной A, необходимо найти пересечения c - дискриминантной кривой с экстремалью AB, соответствующей значению параметра $c = c_0$.

Таким образом, в (27) $F_{yy}(x,y,y')$, $F_{yy'}(x,y,y')$, $F_{y'y'}(x,y,y')$ являются известными функциями x, так как аргумент y равен решению уравнения Эйлера $y=y(x,c)$, взятому при значении $c=c_0$, соответствующем экстремали AB.

Уравнение (27) при этом является линейным однородным уравнением второго порядка относительно u и совпадает с полученным ранее уравнением Якоби.

Если нетривиальное решение $u=\dfrac{\partial y(x,c)}{\partial c}$ этого уравнения, обращающееся в нуль в центре пучка при $x=x_0$ (центр пучка всегда принадлежит c - дискриминантной кривой), обращается в нуль еще в одной точке промежутка $x_0<x\le x_1$, то сопряженная с A точка, определяемая уравнениями

$$y=y(x,c_0),\ \frac{\partial y(x,c_0)}{\partial c}=0,$$

лежит на дуге экстремали AB.

Если же существует решение уравнения Якоби, обращающееся в нуль при $x=x_0$ и не обращающееся в нуль ни в одной точке промежутка $(x_0,x_1]$, то точек, сопряженных с A, на дуге AB нет - условие Якоби выполнено и дугу экстремали AB можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке A.

В силу доказанного ранее условие Якоби является необходимым для достижения экстремума: для кривой AB, реализующей экстремум, сопряженная с A точка не может иметь абсциссу, лежащую в интервале (x_0,x_1).

Пример 2. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$V[y(x)]=\int_0^a (y'^2(x)-y^2(x))dx,$$

проходящей через точки $A(0,\ 0)$, $B(a,\ 0)$?

Уравнение Якоби имеет вид: $-2u-\dfrac{d}{dx}(2u')=0$ или $u''+u=0$, откуда

$$u=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

Так как $u(0)=0$, то $c_1=0$ и $u=c_2\sin x$.

Функция $u(x)$ обращается в нуль в точках $x=k\pi,\ k\in Z$ и, следовательно, если $0<a<\pi$, то на отрезке $[0,a]$ функция $u(x)$ обращается в нуль только в точке $x=0$ и условие Якоби выполнено. Если же $a\ge\pi$, то на отрезке $[0,a]$ функция $u(x)$ обращается в нуль еще по крайней мере в одной точке $x=\pi$ и условие Якоби не выполнено.

Пример 3. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$V[y(x)]=\int_0^a (y'^2(x)+y^2(x)+x^2)dx,$$

проходящей через точки $A(0,\ 0)$, $B(a,\ 0)$?

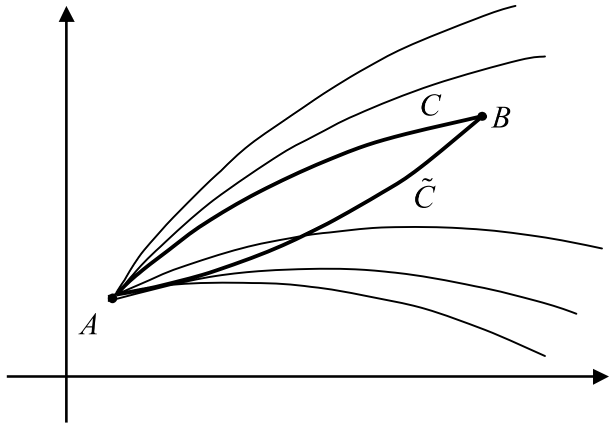
Уравнение Якоби имеет вид:

$$2u-\frac{d}{dx}(2u')=0 \text{ или } u''-u=0,$$

откуда $u=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

Из условия $u(0)=0$ находим $c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1$ и $u(x)=c_1e^x-c_1e^{-x}=2c_1\operatorname{sh}x$. Кривые пучка $u(x)=2c_1\operatorname{sh}x, c_1\ne 0$ пересекают ось Ox лишь в точке $x=0$. Следовательно, условие Якоби выполнено при любом a.

2. Функция Вейерштрасса. Предположим, что в простейшей задачи об экстремуме функционала $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$ условие Якоби выполнено и, следовательно, экстремаль C, проходящая через точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, может быть включена в центральное поле экстремалей с центром в точке A, наклон которого равен $p(x, y)$.



Для определения знака приращения ΔV функционала $V[y(x)]$ при переходе от экстремали C к некоторой близкой допустимой кривой $\tilde{C}$, преобразуем приращение

$$\Delta V[y(x)] = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y')dx - \int_{C} F(x, y, y')dx$$

к более удобному для исследования виду.

Символы $\int_{\tilde{C}} F(x, y, y')dx$ и $\int_{C} F(x, y, y')dx$ представляют собой значения функционала $V[y(x)]$, взятые соответственно по дугам кривых $\tilde{C}$ и C.

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$H[y(x)] = \int_{\tilde{C}} \left[F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) \right] dx. \quad (28)$$

На экстремали C функционал H обращается в $\int_C F(x, y, y')dx$, т.е. совпадает с функционалом $V[y(x)]$, так как на экстремалях поля $y' = p$.

Запишем функционал $H[y(x)]$ в виде:

$$H[y(x)] = \int_{\tilde{C}} \underbrace{\left[F(x, y, p) - pF_p(x, y, p) \right]}_{R(x,y)} dx + \underbrace{F_p(x, y, p)}_{Q(x,y)} dy,$$

т.е. его можно рассматривать как криволинейный интеграл в плоскости Oxy, взятый вдоль дуги кривой $\tilde{C}$. Покажем, что он не зависит от пути интегрирования, т.е. подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Область D, содержащую дугу C экстремали, можно считать односвязной. Поэтому достаточно показать, что

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad \text{в } D.$$

Найдем

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \Big(F_y + p_y F_p - \big(p_y F_p + pF_{yp} + pp_y F_{pp} \big) \Big) - \big(F_{xp} + p_x F_{pp} \big) =$$

$$= F_y - pF_{yp} - F_{xp} - (pp_y + p_x)F_{pp}.$$

Так как C является экстремалью функционала $V[y(x)]$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера, составленному для функционала $V[y(x)]$:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} \equiv 0,$$

где

$$y' = p(x, y(x)), \;\; y'' = p_x + p \cdot p_y,$$

следовательно, $\dfrac{\partial R(x, y)}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ в D.

Таким образом,

$$H[y(x)] = \int_{\tilde C} \left[F(x,y,p) + (y'-p)F_p(x,y,p) \right] dx = \int_C F(x,y,y')dx$$

при любом выборе допустимой кривой $\tilde C$ и, следовательно, приращение ΔV функционала $V[y(x)]$ при переходе от экстремали C к некоторой близкой допустимой кривой $\tilde C$ может быть преобразовано к следующему виду:

$$\Delta V = \int_{\tilde C} F(x,y,y')dx - \int_{\tilde C} \left[F(x,y,p) + (y'-p)F_p(x,y,p) \right] dx =$$

$$= \int_{\tilde C} \left[F(x,y,y')dx - F(x,y,p) - (y'-p)F_p(x,y,p) \right] dx . \qquad (29)$$

Подынтегральное выражение в (29) обозначим через $E(x,y,p,y')$ и назовем **функцией Вейерштрасса.**

Очевидно, достаточным условием достижения функционалом $V[y(x)]$ минимума на кривой C будет неотрицательность функции $E(x,y,p,y')$, так как если $E(x,y,p,y') \geq 0,$ то и $\Delta V \geq 0.$ Достаточным условием максимума будет $E(x,y,p,y') \leq 0,$ так как в этом случае и $\Delta V \leq 0.$

При этом для слабого минимума (максимума) достаточно, чтобы неравенство $E(x,y,p,y') \geq 0$ (≤ 0) выполнялось для значений $x, y,$ близких к значениям x, y на исследуемой экстремали C, и для значений $y',$ близких к $p(x,y)$ на той же экстремали, а для сильного минимума (максимума) те же неравенства должны быть справедливы для тех же $x, y,$ но уже для произвольных $y',$ так как в случае сильного экстремума близкие кривые могут иметь произвольные направления касательных, а в случае слабого экстремума значения y' на близких кривых близки к значениям $y' = p$ на экстремали C.

Следовательно, можно сформулировать

Достаточные условия слабого минимума (максимума):

1. Кривая C является экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям;
2. Экстремаль C может быть включена в центральное поле экстремалей (выполняется условие Якоби);
3. Функция $E(x,y,p,y') \geq 0$ (≤ 0) во всех точках $(x,y),$ близких к кривой C, и для близких к $p(x,y)$ значений $y'.$

Достаточные условия сильного минимума (максимума):

1. Кривая C является экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям;
2. Экстремаль C может быть включена в центральное поле экстремалей (выполняется условие Якоби);
3. Функция $E(x,y,p,y') \geq 0$ (≤ 0) во всех точках $(x,y),$ близких к кривой C, и для произвольных значений $y'.$

Можно доказать, что условие Вейерштрасса является необходимым.

Теорема. *Если экстремаль C, включенная в центральное поле экстремалей, доставляет функционалу $V[y(x)]$ сильный (слабый) экстремум, то вдоль нее при любых y' (при y' близких к p) функция Вейерштрасса сохраняет знак. В случае минимума $E(x,y,p,y') \geq 0,$ а в случае максимума соответственно $E(x,y,p,y') \leq 0.$*

<u>Доказательство.</u> Предположим, что в какой-то точке экстремали C, доставляющей минимум функционалу $V[y(x)],$ выполнено неравенство $E(x,y,p,y') < 0.$ Тогда $E(x,y,p,y')$ отрицательна в некоторой окрестности этой точки и кривую C можно в этой

окрестности изменить так, чтобы полученная из C в результате этого изменения кривая $\tilde{C}$ удовлетворяла условию

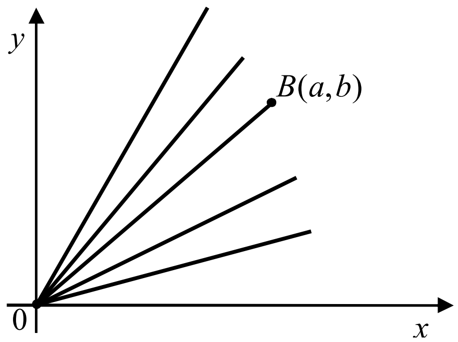
$$\int\limits_{\tilde{C}} E(x, y, p, y')dx < \int\limits_{C} E(x, y, p, y')dx = 0 \ \Rightarrow\ \Delta V < 0,$$

т.е. на кривой C минимум не достигается. Случай максимума рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Пример 4. Исследовать на экстремум функционал $V[y(x)] = \int\limits_0^a y'^3(x)dx$ в классе функций $M = \{y(x) \in C^1[0, a], y(0) = 0,\ y(a) = b\},\ a > 0,\ b > 0.$

Так как $F \equiv F(y')$, то экстремалями являются прямые линии $y = c_1x + c_2$. Учитывая граничные условия, получаем $c_1 = \dfrac{b}{a}, c_2 = 0.$ Пучок экстремалей $y = c_1x$ с центром в точке $(0,\ 0)$ образует центральное поле экстремалей, включающее экстремаль $y = \dfrac{b}{a}x$. Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x,\ y,\ p,\ y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)(y'^2 + y'p - 2p^2) = (y' - p)^2(y' + 2p).$$



На экстремали $y = \dfrac{b}{a}x$ наклон поля $p = \dfrac{b}{a} > 0$ и если y' принимает значения, близкие к $p = \dfrac{b}{a}$, то $E(x, y, p, y') \ge 0$ и, следовательно, все достаточные условия для достижения слабого минимума, выполнены. Итак, на экстремали $y = \dfrac{b}{a}x$ достигается слабый минимум.

Если же y' принимает произвольные значения, то $(y' + 2p)$ может иметь любой знак и, следовательно, функция $E(x, y, p, y')$ знака не сохраняет - сильный минимум на прямой $y = \dfrac{b}{a}x$ не достигается, так как не выполнено необходимое условие Вейерштрасса.

Пример 5. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y(x)] = \int\limits_0^a (6y'^2(x) - y'^4(x) + y(x)y'(x))dx$$

в классе функций $M = \{y(x) \in C^1[0, a], y(0) = 0,\ y(a) = b\},\ a > 0,\ b > 0.$

Подынтегральная функция явно не зависит от x, следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = c$:

$$6y'^2 - y'^4 + yy' - y'(12y' - 4y'^3 + y) = c \Rightarrow -6y'^2 + 3y'^4 = c \Rightarrow y' = c_1 \Rightarrow y = c_1x + c_2,$$

т.е. экстремалями являются прямые. Граничным условиям удовлетворяет прямая $y = \dfrac{b}{a}x$, которая включается в пучок экстремалей, образующих центральное поле. Функция Вейерштрасса

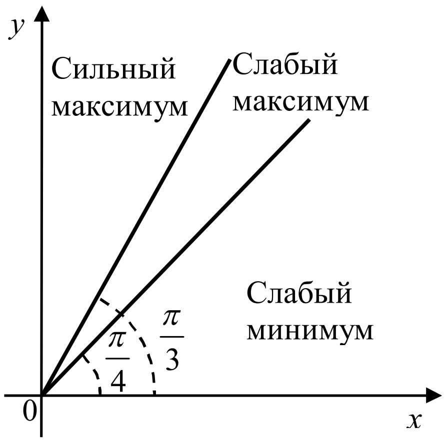
$$E(x, y, p, y') = 6y'^2 - y'^4 + yy' - 6p^2 + p^4 - yp - (y' - p)(12p - 4p^3 + y) =$$

$$= (y' - p)(6(y' + p) - (y'^2 + p^2)(y' + p) + y - 12p + 4p^3 - y) =$$

	1	p	p^2	$-3p^2$
p	1	$2p$	$3p^2$	0

$$= (y'-p)(6y'+6p-y'^3-y'^2p-y'p^2-p^3-12p+4p^3) =$$
$$= -(y'-p)^2(y'^2+2y'p+(3p^2-6)).$$

Знак функции $E(x,y,p,y')$ противоположен знаку последнего множителя $y'^2+2py'+(3p^2-6)$. Этот множитель обращается в нуль и может изменить знак лишь при переходе y' через значение $y'=-p\pm\sqrt{6-2p^2}$. При $6-2p^2\le 0$ $\left(p=\dfrac{b}{a}\ge\sqrt{3}\right)$ при любом y' имеем $y'^2+2py'+(3p^2-6)\ge 0$. Если же $6-2p^2>0$ $\left(p=\dfrac{b}{a}<\sqrt{3}\right)$, то выражение $y'^2+2py'+(3p^2-6)$ меняет знак. Если при этом y' достаточно близко к p, то последнее выражение $y'^2+2py'+(3p^2-6)\approx p^2+2p^2+3p^2-6=6(p^2-1)$ и сохраняет знак “+” при $p>1$ и знак “ $-$ ” при $p<1$.



Следовательно, при $p=\dfrac{b}{a}<1$ (или $b<a$) имеет слабый минимум, так как $E(x,y,p,y')\ge 0$ при значениях y' достаточно близких к p; при $1<p<\sqrt{3}$ (или $a<b<a\sqrt{3}$) имеет слабый максимум; при $p\ge\sqrt{3}$ $\left(\text{или } b\ge a\sqrt{3}\right)$ достигается сильный максимум, так как $E(x,y,p,y')\le 0$ при любых значениях y'. При $p<\sqrt{3}$ на основании необходимого условия Вейерштрасса сильный экстремум не достигается.

3. Условие Лежандра. Из приведенных примеров видно, что исследование знака функции $E(x,y,p,y')$ сопряжено с некоторыми затруднениями даже в весьма простых случаях, поэтому желательно условие сохранения знака функции $E(x,y,p,y')$ заменить другим, легко проверяемым, условием.

По формуле Тейлора получим:

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)F_{y'}(x,y,p)+\frac{(y'-p)^2}{2}F_{y'y'}(x,y,q), \qquad (30)$$

где q заключено между p и y'.

Тогда функция $E(x,y,p,y')$ примет вид:

$$E(x,y,p,y')=\frac{(y'-p)^2}{2}F_{y'y'}(x,y,q).$$

Отсюда видно, что функция $E(x,y,p,y')$ сохраняет знак, если сохраняет знак $F_{y'y'}(x,y,q)$. При исследовании на слабый экстремум функция $F_{y'y'}(x,y,q)$ должна сохранять знак для значений x и y в точках, близких к точкам исследуемой экстремали и для значений q, близких к p. Если $F_{y'y'}(x,y,p)\ne 0$ в точках экстремали C, то в силу непрерывности эта вторая производная сохраняет знак и в точках, близких к кривой C, и для значений y', близких к значениям y' на экстремали C.

Таким образом, при исследовании на слабый минимум (максимум) условие $E(x,y,p,y')\ge 0$ $(E(x,y,p,y')\le 0)$ может быть заменено условием

$$F_{y'y'} > 0 \left(F_{y'y'} < 0\right) \text{ на экстремали } C.$$

Это условие носит название **усиленного условия Лежандра.**

При исследовании на сильный экстремум условие $E(x,y,p,y') \geq 0$ $(E(x,y,p,y') \leq 0)$ может быть заменено требованием $F_{y'y'}(x,y,q) \geq 0 \left(F_{y'y'}(x,y,q) \leq 0\right)$ в точках (x,y), близких к точкам кривой C при произвольных значениях q. При этом предполагается, что разложение по формуле Тейлора (30) имеет место при любых y'.

Пример 6. Исследовать на экстремум функционал $V[y(x)] = \int\limits_0^a (y'^2(x) - y^2(x))dx$ в классе функций $M = \{y(x) \in C^1[0,a], y(0)=0,\ y(a)=b\}$, $a>0,\ b>0.$

Уравнение Эйлера имеет вид $-2y - \dfrac{d}{dx}(2y') = 0$ или $y'' + y = 0$. Его общее решение $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Используя граничные условия, получаем $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, если $a \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Итак при $a \neq k\pi$ экстремум может достигаться лишь на прямой $y = 0$. Если $a < \pi$, то пучок экстремалей $y = c\sin x$ с центром в точке $(0,0)$ образует центральное поле. При $a \geq \pi$ условие Якоби не выполнено.

Так как подынтегральная функция $F = y'^2 - y^2$ такова, что $F_{y'y'} = 2 > 0$ при любых значениях y', то на прямой $y = 0$ при $a < \pi$ реализуется сильный минимум.

Если $a > \pi$ минимум на прямой $y = 0$ не достигается, так как не выполнено необходимое условие Якоби.

Пример 7. Исследовать на экстремум функционал $T[y(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}dx$ в классе гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям $y(0) = 0,\ y(x_1) = y_1$.

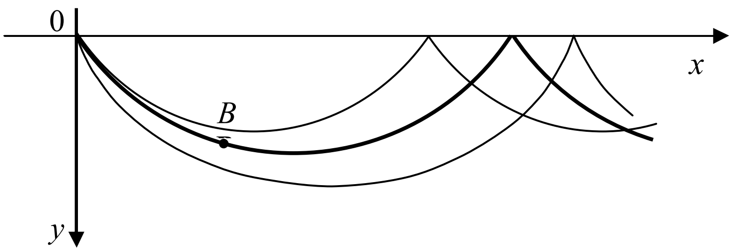
Экстремалями являются циклоиды (пример 14 §2). Пучок циклоид

$$x = C_1(t - \sin t),\ y = C_1(1 - \cos t)$$

с центром в точке (0, 0) образует центральное поле, включающее экстремаль

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),$$

где a определено из условия прохождения циклоиды через вторую граничную точку $B(x_1, y_1)$, если $x_1 < 2\pi a$.



Имеем $F_{y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$,

$$F_{y'y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2} - \dfrac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{\sqrt{y}(1+y'^2)} = \frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} > 0 \text{ при любых } y'.$$

Следовательно, при $x_1 < 2\pi a$ на циклоиде $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ реализуется сильный минимум.

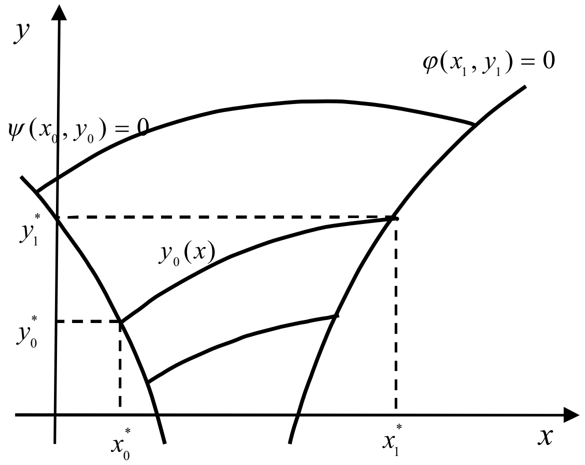
V. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

1. Постановка задачи. Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ непрерывно дифференцируемые, т.е. $y(x)\in C^1(\Delta)$, где Δ - некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются значения x_0 и x_1, которые заранее не заданы;

б) значения $x_0, y_0 = y(x_0)$ и $x_1, y_1 = y(x_1)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям

$$\psi(x_0, y_0) = 0,\ \varphi(x_1, y_1) = 0, \qquad (31)$$



где $\psi(x,y),\varphi(x,y)$ − заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве M задан функционал

$$V\big[y(x)\big] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$$

где функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $y_0(x)$, на которой функционал $V\big[y(x)\big]$ достигает экстремума.

Замечание 1. Условия (31) определяют подвижные границы. Таким образом, экстремум в поставленной задаче ищется в классе гладких кривых, концы которых скользят по двум заданным линиям, которые описываются уравнениями $\psi(x_0, y_0) = 0$ (для левого конца) и $\varphi(x_1, y_1) = 0$ (для правого конца).

Можно выделить следующие частные случаи общей постановки задачи:

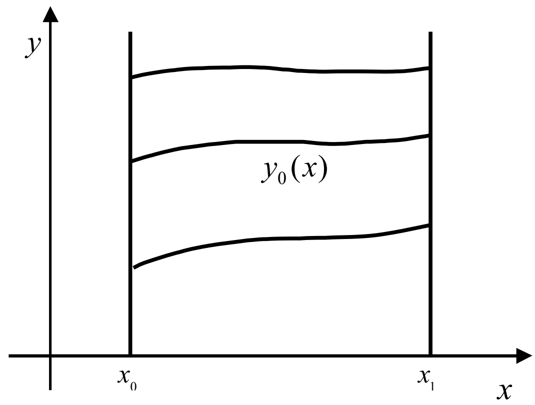
А. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым, которые заданы уравнениями: $x = x_0$, $x = x_1$.

Б. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым, которые заданы уравнениями:

$$y = \psi(x),\ \ y = \varphi(x). \qquad (32)$$

В рамках рассматриваемого частного случая выделим задачу, в которой заданные кривые являются прямыми линиями, параллельными оси абсцисс:

$$y = y_0,\ \ y = y_1.$$



Замечание 2. В поставленной задаче наряду с поиском кривой $y_0(x)$ фактически проводится выбор значений x_0^* и x_1^*, т.е. ищется тройка $\left(y_0(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right)$. При этом $\varepsilon-$окрестность k-го порядка $(k = 0,1)$ образуется тройками $\left(y(x),\ x_0,\ x_1\right)$, удовлетворяющими условиям

$$\left\| y(x) - y_0(x) \right\|_{C^k(\Delta)} < \varepsilon,\ \left| x_0 - x_0^* \right| < \varepsilon,\ \left| x_1 - x_1^* \right| < \varepsilon.$$

Функционал $V\left[y(x)\right]$ точнее записывается в форме $V\left[y(x),\ x_0,\ x_1\right]$ и достигает на тройке $\left(y_0(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right)$ сильного (слабого) экстремума, если $V\left[y(x),\ x_0,\ x_1\right] \ge V\left[y_0(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right]$ в случае минимума или $V\left[y(x),\ x_0,\ x_1\right] \le V\left[y_0(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right]$ в случае максимума в $\varepsilon-$окрестности нулевого (первого) порядка.

2. Необходимое условие экстремума. Пусть на тройке $\left(y_0(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right)$ достигается экстремум функционала. Так как $V\left[y(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right] \ge V\left[y_0(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right]$ $\left(V\left[y(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right] \le V\left[y_0(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right]\right)$ в случае минимума (максимума), где $y(x) \in C^1(\Delta)$ и $y(x_0^*) = y_0(x_0^*),\ y(x_1^*) = y_0(x_1^*),$ то в силу необходимого условия экстремума функционала в простейшей задаче вариационного исчисления $y_0(x)$ является экстремалью, т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y\left(x,\ y_0(x),\ y_0'(x)\right) - \frac{d}{dx}F_{y'}\left(x,\ y_0(x),\ y_0'(x)\right) \equiv 0. \tag{33}$$

Рассмотрим допустимые кривые $y(x),$ определяемые соотношением

$$y(x) = y_0(x) + \alpha\delta y,$$

где $\delta y-$фиксированная вариация, $\alpha-$числовой параметр, пределы интегрирования $x_0 = x_0^* + \alpha\delta x_0,\ x_1 = x_1^* + \alpha\delta x_1,$ значения δx_0 и δx_1 фиксированы. Так как $V\left[y(x),\ x_0,\ x_1\right] = \theta(\alpha)$ – функция числового параметра $\alpha,$ которая достигает экстремума во внутренней точке $\alpha = 0,$ то

$$\theta'(0) = \frac{\partial}{\partial\alpha}V\left[y(x),\ x_0,\ x_1\right]\Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Расписывая подробнее, получаем

$$0 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_{x_0^*+\alpha\delta x_0}^{x_1^*+\alpha\delta x_1} F\left(x,\ y_0(x) + \alpha\delta y,\ y_0'(x) + \alpha\delta y'\right)dx\Big|_{\alpha=0}.$$

Воспользуемся формулой дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{U(\alpha)}^{V(\alpha)} f(x,\ \alpha)dx = \int\limits_{U(\alpha)}^{V(\alpha)} \frac{\partial f(x,\ \alpha)}{\partial\alpha}dx + f(V(\alpha),\ \alpha)\frac{dV}{d\alpha} - f(U(\alpha),\ \alpha)\frac{dU}{d\alpha}.$$

Тогда получаем

$$0 = \left\{\int\limits_{x_0^*+\alpha\delta x_0}^{x_1^*+\alpha\delta x_1}\left[F_y\left(x,\ y_0(x) + \alpha\delta y,\ y_0'(x) + \alpha\delta y'\right)\delta y + F_{y'}\left(x,\ y_0(x) + \alpha\delta y,\ y_0'(x) + \alpha\delta y'\right)\delta y'\right]dx + \right.$$

$$+F\left(x,\ y_0(x) + \alpha\delta y,\ y_0'(x) + \alpha\delta y'\right)\Big|_{x=x_1^*+\alpha\delta x_1}\cdot\delta x_1 -$$

$$\left.-F\left(x,\ y_0(x) + \alpha\delta y,\ y_0'(x) + \alpha\delta y'\right)\Big|_{x=x_0^*+\alpha\delta x_0}\cdot\delta x_0\right\}\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_{x_0^*}^{x_1^*}\left[F_y\left(x,\ y_0(x),\ y_0'(x)\right)\delta y + F_{y'}\left(x,\ y_0(x),\ y_0'(x)\right)\delta y'\right]dx +$$

$$+F\left(x_1^*,\ y_0(x_1^*),\ y_0'(x_1^*)\right)\delta x_1 - F\left(x_0^*,\ y_0(x_0^*),\ y_0'(x_0^*)\right)\delta x_0.$$

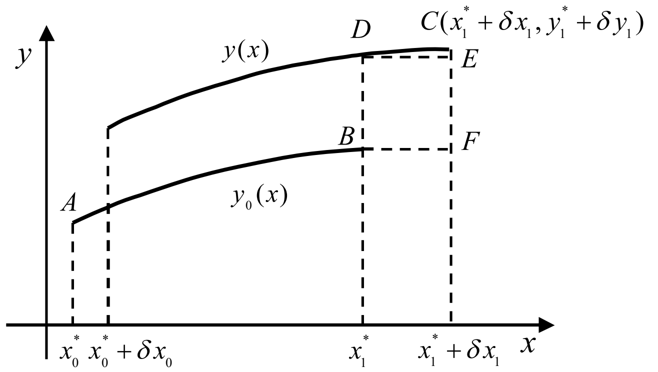
Проинтегрируем второе слагаемое по частям:

$$0=\int_{x_0^*}^{x_1^*}\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx+F_{y'}\delta y\Big|_{x_0^*}^{x_1^*}+F\Big|_{x=x_1^*}\cdot\delta x_1-F\Big|_{x=x_0^*}\cdot\delta x_0.$$

Таким образом, в силу (33) получаем

$$F_{y'}\delta y\Big|_{x_0^*}^{x_1^*}+F\Big|_{x=x_1^*}\delta x_1-F\Big|_{x=x_0^*}\delta x_0=0. \tag{34}$$

Заметим, что $\delta y(x_1^*)$ не совпадает с δy_1, а $\delta y(x_0^*)$ не совпадает с δy_0.



На рисунке $BD=\delta y(x_1^*)$, $FC=\delta y_1$, $DE=\delta x_1$, $EC\approx y_0'(x_1^*)\delta x_1$, $BD=FC-EC$, т.е.

$$\delta y(x_1^*)\cong\delta y_1-y_0'(x_1^*)\delta x_1.$$

Заметим, что приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых более высокого порядка по сравнению с δx_1.

Аналогично

$$\delta y(x_0^*)\cong\delta y_0-y_0'(x_0^*)\delta x_0.$$

Поэтому равенство (34) можно записать в форме:

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1^*}\delta y_1+\left[F-y_0'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1^*}\delta x_1-F_{y'}\Big|_{x=x_0^*}\delta y_0-\left[F-y_0'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0^*}\delta x_0+o(\delta x_0)+o(\delta x_1)=0,$$

откуда в силу произвольности δx_0 и δx_1 получаем

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1^*}\delta y_1+\left[F-y_0'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1^*}\delta x_1-F_{y'}\Big|_{x=x_0^*}\delta y_0-\left[F-y_0'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0^*}\delta x_0=0. \tag{35}$$

Однако вариации $\delta x_0, \delta y_0$ не связаны с вариациями $\delta x_1, \delta y_1$, поэтому равенство (35) можно переписать в форме

$$\begin{cases} F_{y'}\Big|_{x=x_0^*}\delta y_0+\left[F-y_0'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0^*}\delta x_0=0,\\ F_{y'}\Big|_{x=x_1^*}\delta y_1+\left[F-y_0'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1^*}\delta x_1=0.\end{cases} \tag{36}$$

В силу граничных условий вариации δx_0 и δy_0, а также δx_1 и δy_1 связаны соотношениями:

$$\begin{cases}\psi(x_0,y(x_0))=\psi(x_0^*+\alpha\delta x_0, y_0(x_0^*)+\alpha\delta y_0)=0,\\ \varphi(x_1,y(x_1))=\varphi(x_1^*+\alpha\delta x_1, y_0(x_1^*)+\alpha\delta y_1)=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\underbrace{\psi(x_0^*,y_0(x_0^*))}_{=0}+\alpha\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x_0^*,y_0(x_0^*)}\delta x_0+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\Big|_{x_0^*,y_0(x_0^*)}\delta y_0\right)+o(\alpha)=0,\\ \underbrace{\varphi(x_1^*,y_0(x_1^*))}_{=0}+\alpha\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x_1^*,y_0(x_1^*)}\delta x_1+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{x_1^*,y_0(x_1^*)}\delta y_1\right)+o(\alpha)=0.\end{cases}$$

Так как α - произвольный параметр, получаем

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x_0^*, y_0(x_0^*)} \delta x_0 + \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{x_0^*, y_0(x_0^*)} \delta y_0 = 0, \\ \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x_1^*, y_0(x_1^*)} \delta x_1 + \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{x_1^*, y_0(x_1^*)} \delta y_1 = 0. \end{cases} \tag{37}$$

Условия (36), (37) называются **условиями трансверсальности**.

Сформулируем описанные результаты в виде теоремы:

Теорема (необходимое условие экстремума). *Если на функции* $y_0(x) \in M$ *функционал* $V\left[y(x)\right]$ *достигает экстремума, то функция* $y_0(x)$ *удовлетворяет*

1) уравнению Эйлера $F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0;$

2) условиям трансверсальности (36), (37).

Замечание 3. Если один из концов допустимых кривых закреплен, то условия трансверсальности для этого конца не выписываются, поскольку в этом случае соответствующие вариации в (36) и (37) равны нулю.

Замечание 4. Если рассматривается задача, в которой концы кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым $x = x_0,\ x = x_1,$ то поскольку x_0 и x_1 заданы, вариации $\delta x_0 = 0,\ \delta x_1 = 0.$ Следовательно, условия трансверсальности имеют вид

$$\left. F_{y'} \right|_{x = x_0^*} = 0, \quad \left. F_{y'} \right|_{x = x_1^*} = 0. \tag{38}$$

Условия (37) выполняются, так как уравнения прямых можно записать в форме $\psi(x_0) = x_0 - x_0^* = 0,\ \varphi(x_1) = x_1 - x_1^* = 0.$

Замечание 5. Если концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым $y = \psi(x)$ и $y = \varphi(x),$ то условие (31) можно записать в виде

$$\psi(x_0, y_0) = y_0 - \psi(x_0) = 0,$$
$$\varphi(x_1, y_1) = y_1 - \varphi(x_1) = 0.$$

Следовательно, из (37) получаем

$$\begin{cases} -\psi'(x_0^*)\delta x_0 + \delta y_0 = 0, \\ -\varphi'(x_1^*)\delta x_1 + \delta y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta y_0 = \psi'(x_0^*)\delta x_0, \\ \delta y_1 = \varphi'(x_1^*)\delta x_1. \end{cases}$$

Тогда из (36) следует

$$\begin{cases} \left.\left[F + (\psi' - y_0')F_{y'} \right]\right|_{x = x_0^*} \delta x_0 = 0, \\ \left.\left[F + (\varphi' - y_0')F_{y'} \right]\right|_{x = x_1^*} \delta x_1 = 0. \end{cases}$$

В силу произвольности вариаций δx_0 и δx_1 получаем условия трансверсальности для данного случая

$$\begin{cases} \left.\left[F + (\psi' - y_0')F_{y'} \right]\right|_{x = x_0^*} = 0, \\ \left.\left[F + (\varphi' - y_0')F_{y'} \right]\right|_{x = x_1^*} = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Если рассматривается случай задания кривых в виде $y = y_0\left(= \psi(x)\right),\quad y = y_1\left(= \varphi(x)\right),$ то $\psi'(x) = 0,\ \varphi'(x) = 0,$ а условия (39) упрощаются:

$$\left[F - y_0' F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0^*} = 0, \quad \left[F - y_0' F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1^*} = 0. \tag{40}$$

Замечание 6. Если условия (31) отсутствуют, то вариации δx_0, $\delta y_0, \delta x_1$, δy_1 произвольны. Тогда из (36) следует

$$\begin{gathered} F_{y'}\Big|_{x=x_0^*} = 0, \ \left[F - y_0' F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0^*} = 0, \\ F_{y'}\Big|_{x=x_1^*} = 0, \ \left[F - y_0' F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1^*} = 0. \end{gathered} \tag{41}$$

Замечание 7. Если условия (31) записаны в форме $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, т.е. рассматривается задача с неподвижными границами, то, поскольку вариации $\delta x_0 = \delta y_0 = \delta x_1 = \delta y_1 = 0$, условия трансверсальности (42) выполняются, а произвольные постоянные в общем решении уравнения Эйлера определяются граничными условиями.

Пример 1. Найти экстремаль функционала $V[y(x)] = \int\limits_0^1 y'(x)\left(y'(x) - x\right)dx$, удовлетворяющую граничным условиям $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Запишем уравнение Эйлера. Так как $F = y'(y' - x)$, $F_y = 0$, $F_{y'} = 2y' - x$, $\frac{d}{dx}F_{y'} = 2y'' - 1$, то имеем $-2y'' + 1 = 0$.

Найдем общее решения уравнение Эйлера:

$$y'' = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ y = \frac{x^2}{4} + xc_1 + c_2.$$

Поскольку левый и правый концы допустимых кривых скользят по вертикальным прямым $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ (замечание 4), то запишем условие трансверсальности на обоих концах:

$$F_{y'}\Big|_{x=x_0^*} = 2y'(0) = 2c_1 = 0 \ - \text{ на левом конце}$$

и

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1^*} = 2y'(1) - 1 = 2c_1 = 0 \ - \text{ на правом конце.}$$

Из этих условий следует, что $c_1 = 0$. Так как больше нет никаких дополнительных условий, то можно сделать вывод, что искомая экстремаль, а точнее семейство экстремалей, имеет вид $y_0(x) = \dfrac{x^2}{4} + c$.

Пример 2. Найти экстремаль функционала

$$V[y(x)] = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2(x) + 4y^2(x) - 8xy(x) + 2x^2\right)dx,$$

левый конец которой закреплен: $y(-1) = 3$, а правый движется по прямой $x = 1$.

В примере 1 §3 были найдены экстремали для данного функционала: $y(x) = x + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$.

Так как правый конец допустимой кривой лежит на вертикальной прямой $x = 1$ (замечание 4), то запишем условия трансверсальности (38) на правом конце и граничные условия на левом конце

$$F_{y'}\big|_{x=1} = 2y'(1) = 0, \ y(-1) = 3.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} -1+c_1e^2+c_2e^{-2}=3, \\ 2-4c_1e^{-2}+4c_2e^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=4e^{-2}-c_2e^{-4}, \\ -2e^{-2}\left(4e^{-2}-c_2e^{-4}\right)+2c_2e^2+1=0. \end{cases}$$

Отсюда следует $c_1=\dfrac{(8e^4+1)e^2}{2\left(e^8+1\right)}$, $c_2=\dfrac{\left(8-e^4\right)e^2}{2\left(e^8+1\right)}$. В результате получаем экстремаль

$$y_0(x)=x+\frac{(8e^4+1)e^2}{2\left(e^8-1\right)}e^{-2x}+\frac{\left(8-e^4\right)e^2}{2\left(e^8+1\right)}e^{2x}.$$

Пример 3. Найти кривую, на которой функционал $V[y(x)]=\int\limits_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{x-2}dx$ может достигать экстремума, если левый конец ее фиксирован в точке (0,0), а правый находится на прямой $y=-4x+4$.

Так как подынтегральная функция явно не зависит от y, уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F_{y'}=\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\,(x-2)}=c.$ Полученное уравнение первого порядка решаем методом введения параметра, для этого найдем $x=x(y',c)$:

$$x-2=\frac{y'}{c\sqrt{1+y'^2}}\Rightarrow x=\frac{y'}{c\sqrt{1+y'^2}}+2.$$

Введем параметр $y'=tgp$, тогда $x=\dfrac{tgp}{c\sqrt{1+tg^2p}}+2\Rightarrow x=c_1\sin p+2$, где $c_1=\dfrac{1}{c}$.

Продифференцируем полученное равенство:

$$dx=c_1\cos pdp.$$

Тогда $dy=y'dx=c_1\sin pdp.$ Интегрируя, получаем

$$y=-c_1\cos p+c_2.$$

Таким образом, параметрическое уравнение семейства экстремалей имеет вид:

$$\begin{cases} x=c_1\sin p+2, \\ y=-c_1\cos p+c_2 \end{cases}$$

Исключая параметр p, находим

$$\left(x-2\right)^2+\left(y-c_2\right)^2=c_1^2 \quad - \qquad (43)$$

семейство окружностей с центром в точке $(2,c_2)$ радиуса $|c_1|$.

Первое граничное условие $y(0)=0$ дает $c_2^2+4=c_1^2$. Подставляя в (43), имеем:

$$\left(x-2\right)^2+\left(y-c_2\right)^2=c_2^2+4.$$

Запишем условие трансверсальности на правом конце в форме (39):

$$\left.\left[\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x-2}+(-4-y')\frac{y'}{(x-2)\sqrt{1+y'^2}}\right]\right|_{x=x_1}=0,$$

откуда

$$\left.\left[1+y'^2-4y'-y'^2\right]\right|_{x=x_1}=0 \text{ или } 1-4y'(x_1)=0.$$

Таким образом, $y'(x_1)=\dfrac{1}{4}$ – угловой коэффициент касательной к окружности в точке x_1. Кроме того, точка $\left(x_1, y(x_1)\right)$ лежит на прямой $y=-4x+4$, угловой коэффициент которой равен –4. Следовательно, в рассматриваемой точке окружность и прямая ортогональны, а значит центр окружности (точка $(2,c_2)$) лежит на прямой $y=-4x+4$, т.е.

$$c_2=-4\cdot 2+4=-4.$$

Таким образом, получаем уравнение искомой экстремали

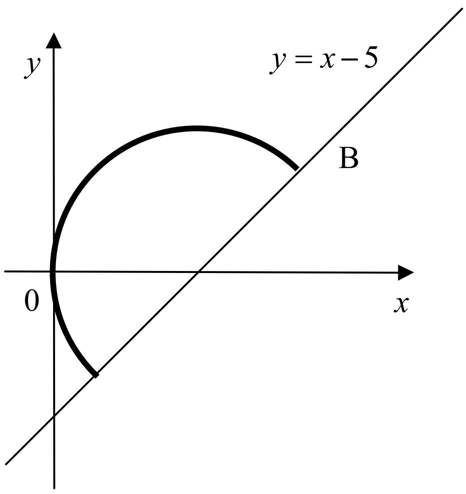
$$\left(x-2\right)^2+\left(y+4\right)^2=20$$

или, учитывая, что $x_1<2$ имеем

$$y_0(x)=-4+\sqrt{16-x^2-4x}.$$

Пример 4. Найти кривую, на которой функционал $V[y(x)]=\int\limits_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{y(x)}dx$ может достигать экстремума, если левый конец ее фиксирован в точке (0,0), а правый находится на прямой $y=x-5$.

Интегральными кривыми уравнения Эйлера (пример 13 §2) являются окружности $(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$. Первое граничное условие $y(0)=0$ дает $c_1^2=c_2^2$.



Запишем условие трансверсальности в граничной точке:

$$\left[\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}+(1+y')\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0, \text{ откуда}$$

$$\left[1+y'^2+(1-y')y'\right]\Big|_{x=x_1}=0 \text{ или } y'(x_1)=-1,$$

т.е. окружность и прямая $y=x-5$ в граничной точке ортогональны. Таким образом, центр окружности принадлежит прямой $y=x-5$ и, следовательно, центр искомой окружности находится в точке $(5,0)$ пересечения прямой $y=x-5$ с осью абсцисс.

Таким образом, имеем $(x-5)^2+y^2=25$ или $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$.

Итак, экстремум может достигаться лишь на дугах окружности $y=\sqrt{10x-x^2}$ (максимум) и $y=-\sqrt{10x-x^2}$ (минимум).

V. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Рассмотренные ранее задачи характеризовались тем, что их решения должны были удовлетворять некоторым условиям на границе области интегрирования. Однако во многих важных приложениях вариационного исчисления на решение задачи накладываются некоторые дополнительные условия – так называемые **условия связи.** В этой связи вспомним задачу Дидоны. Контур (т.е. ремень из бычьей шкуры, которым охватывался участок земли) имел вполне определенную длину. Это значит, что функция, дающая решение задачи Дидоны, должна удовлетворять не только граничным условиям, но и дополнительному условию: длина графика функции фиксирована. В задаче о геодезических линиях кривая $y = y(x),\ z = z(x)$ должна была принадлежать поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$.

1. Задачи на условный экстремум с конечными связями. Рассмотрим множество M допустимых вектор - функций $y(x) = (y_1(x),..,y_n(x))$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y_i(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[x_0, x_1]$, где x_0, x_1 фиксированы;

б) функции $y_i(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{gathered} y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20},.., y_n(x_0) = y_{n0}, \\ y_1(x_1) = y_{11}, y_2(x_1) = y_{21},.., y_n(x_1) = y_{n1}, \end{gathered} \tag{44}$$

т.е. каждая из кривых $y_i(x)$ проходит через две закрепленные точки;

в) функции $y_i(x)$ при всех $x \in [x_0, x_1]$ удовлетворяют **конечным связям:**

$$\varphi_j(x, y_1(x),.., y_n(x)) = 0, \quad j = \overline{1,m},\ m < n, \tag{45}$$

где функции $\varphi_j(x, y_1,.., y_n),\ j = \overline{1,m},$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным.

Предполагается, что уравнения (45) независимы, т.е.

$$rang\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & ... & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_1} & ... & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_n} \end{pmatrix} = m,$$

а также связи (45) согласованы с граничными условиями (44). Последнее означает, что граничные точки должны удовлетворять уравнениям (45) при $x = x_0$ и $x = x_1$.

На множестве M задан функционал

$$V[y_1(x),.., y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x),.., y_n(x), y_1'\ (x),.., y_n'\ (x))dx, \tag{46}$$

где функция $F(x, y_1,.., y_n, y_1'\ ,.., y_n'\ )$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор - функций $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор – функцию $y_0(x)$, на которой функционал (46) достигает экстремума.

Наиболее естественный путь решения: разрешая систему $\varphi_j(x, y_1,.., y_n) = 0$, $j = \overline{1,m},$ относительно $y_1,.., y_m$ (или каких-нибудь других m функций y_i) и подставляя их выражения в $V[y_1(x),.., y_n(x)]$, мы получим функционал $W[y_{m+1},.., y_n(x)]$, зависящий только от $n-m$ уже независимых аргументов и, следовательно, к функционалу W применимы ранее изложенные методы.

Однако более удобен другой метод, называемый методом неопределенных множителей, сохраняющий полное равноправие переменных.

Теорема (необходимые условия экстремума). *Если на вектор - функции $y_0(x)=(y_1^0(x),..,y_n^0(x))\in M$ функционал (46) достигает экстремума, то функции $y_1^0(x),..,y_n^0(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$\tilde{F}_{y_i}-\frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_i'}=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{47}$$

где $\tilde{F}(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n')=F(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n')dx+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\varphi_j(x,y_1,..,y_n).$

Доказательство. Воспользуемся необходимым условием экстремума $\delta V[y_0(x)]=0$. Для этого выделим из приращения функционала ΔV линейную относительно $\delta y_1,..,\delta y_n$ часть:

$$\Delta V=\int\limits_{x_0}^{x_1}[F(x,y_1^0(x)+\delta y_1,..,y_n^0(x)+\delta y_n,y_1^{0\prime}(x)+\delta y_1{}',..,y_n^{0\prime}(x)+\delta y_n{}')-$$

$$-F(x,y_1^0(x),..,y_n^0(x),y_1^{0\prime}(x),..,y_n^{0\prime}(x)]dx=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\Big[F_{y_i}\Big(x,y_1^0(x),\ldots,y_n^0(x),y_1^{0\prime}(x),\ldots,y_n^{0\prime}(x)\Big)\delta y_i+F_{y_i'}\Big(x,y_1^0(x),\ldots,y_n^0(x),y_1^{0\prime}(x),\ldots,y_n^{0\prime}(x)\Big)\delta y_i{}'\Big]dx+\varepsilon_1,$$

где ε_1 - величина порядка малости выше первого относительно $\|\delta y_i\|_{C^1[x_0,x_1]}$.

Проинтегрируем по частям вторые слагаемые в каждой скобке, полагая

$$\begin{bmatrix} u=F_{y_i'}(x,y_1^0(x),..,y_n^0(x),y_1^{0\prime}(x),..,y_n^{0\prime}(x)), & dv=\delta y_i'\,dx,\\ du=\dfrac{d}{dx}F_{y_i'}(x,y_1^0(x),..,y_n^0(x),y_1^{0\prime}(x),..,y_n^{0\prime}(x))\,dx, & v=\delta y_i\end{bmatrix}$$

и примем во внимание, что $\delta y_i(x_0)=\delta y_i(x_1)=0$.

Тогда

$$\Delta V=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\Big[F_{y_i}(x,y_1^0(x),..,y_n^0(x),y_1^{0\prime}(x),..,y_n^{0\prime}(x))-$$

$$-\frac{d}{dx}F_{y_i'}(x,y_1^0(x),..,y_n^0(x),y_1^{0\prime}(x),..,y_n^{0\prime}(x))\Big]\delta y_i dx+\varepsilon_1.$$

Так как функции $y_1(x),..,y_n(x)$ подчинены m независимым связям $\varphi_j(x,y_1,..,y_n)=0,\ j=\overline{1,m}$, то вариации $\delta y_i, i=\overline{1,n}$ не произвольны.

Имеем

$$\begin{aligned}0=\varphi_j(x,y_1^0(x)+\delta y_1,..,y_n^0(x)+\delta y_n)-\varphi_j(x,y_1^0(x),..,y_n^0(x))=\\ =\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}(x,y_1^0(x),..,y_n^0(x))\delta y_i+R_j,\end{aligned} \tag{48}$$

где величины R_j имеют порядок малости выше первого относительно δy_i.

Таким образом, только $n-m$ из вариаций δy_i можно считать произвольными.

Умножая почленно каждое из уравнений (48) на $\lambda_j(x)$ и интегрируя по x в пределах от x_0 до x_1, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_j(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}\delta y_i dx + \varepsilon^j = 0,$$

где ε^j - величины порядка малости выше первого относительно δy_i. Таким образом,

$$\Delta V = \int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}[F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'}\ ]dx + \sum_{j=1}^{m}\int_{x_0}^{x_1}\lambda_j(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}\delta y_i dx + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon^j + \varepsilon_1 =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\left[F_{y_i} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}F_{y_i'}\ \right]\delta y_i dx + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\delta V[y_0(x)] = \int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\left[F_{y_i} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'}\ \right]\delta y_i dx = 0.$$

Если ввести обозначение

$$\tilde{F}(x, y_1,.., y_n, y_1',.., y_n') = F(x, y_1,.., y_n, y_1',.., y_n') + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\varphi_j(x, y_1,.., y_n),$$

где функции $\tilde{F}(x, y_1,.., y_n, y_1',.., y_n')$ называется функцией Лагранжа, а функции $\lambda_j(x), j = \overline{1,m}$ - множителями Лагранжа, последнее уравнение примет вид

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{F}_{y_i} - \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_i'}\ \right]\delta y_i dx = 0. \tag{49}$$

Не ограничивая общности, предположим, что

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

и выберем m множителей $\lambda_1(x),.., \lambda_m(x)$ так, чтобы они удовлетворяли m уравнениям Эйлера

$$\tilde{F}_{y_i} - \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_i'}\ = 0,\ i = \overline{1,m} \tag{50}$$

или в развернутом виде

$$F_{y_i} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'}\ = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Эти уравнения образуют линейную по отношению к $\lambda_j(x)$ систему с отличными от нуля определителем, следовательно, это система имеет единственное решение.

При таком выборе $\lambda_i(x),\dots,\lambda_m(x)$ уравнение (49) принимает вид:

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=m+1}^{n}\left[\tilde{F}_{y_i} - \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_i'}\ \right]\delta y_i dx = 0\ .$$

Так как для функций $y_1^0(x),.., y_n^0(x)$, реализующих экстремум функционала $V[y_1(x),.., y_n(x)]$, это функциональное уравнение обращается в тождество уже при произвольном выборе $\delta y_i, i = \overline{m+1, n}$, то теперь можно применять лемму Лагранжа. Положив по очереди все δy_i, кроме одного, равными 0 и применив лемму, получим

$$\tilde{F}_{y_i} - \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_i'} = 0,\ i = \overline{m+1, n}.$$

Принимая во внимание полученные выше уравнения (50), окончательно будем иметь, что функции $y_1^0(x),..,y_n^0(x)$, реализующие условный экстремум функционала $V[y_1(x),..,y_n(x)]$, и множители $\lambda_j(x)$ должны удовлетворять системе уравнений Эйлера (47).

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$V\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[y_1^2(x) + y_2^2(x) - y_1'^2(x) - y_2'^2(x)\right]dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0)=1,\ y_2(0)=-1,\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ и уравнению связи $y_1 - y_2 - 2\cos x = 0.$

Прежде всего, заметим, что граничные условия и уравнение связи согласованы:

$$y_1(0) - y_2(0) - 2\cos 0 = 1 + 1 - 2\cdot 1 = 0,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos\frac{\pi}{2} = 1 - 1 - 2\cdot 0 = 0.$$

Составим функцию Лагранжа

$$\tilde{F} = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \lambda(x)\left(y_1 - y_2 - 2\cos x\right).$$

Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$\tilde{F}_{y_1} = 2y_1 + \lambda(x);\quad \tilde{F}_{y_1'} = -2y_1';\quad \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_1'} = -2y_1'';$$

$$\tilde{F}_{y_2} = 2y_2 + \lambda(x);\quad \tilde{F}_{y_2'} = -2y_2';\quad \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_2'} = -2y_2'',$$

то имеем

$$\begin{cases} 2y_1 + \lambda(x) + 2y_1'' = 0, \\ 2y_2 - \lambda(x) + 2y_2'' = 0, \\ y_1 - y_2 - 2\cos x = 0. \end{cases}$$

Найдём общее решение системы. Складывая первые два уравнения, получаем

$$2\left(y_1 + y_2\right) + 2\left(y_1 + y_2\right)'' = 0 \Rightarrow 2\left(y_1 + y_2\right) + 2\left(y_1 + y_2\right)'' = 0 \Rightarrow$$

$$\left(y_1 + y_2\right)'' + \left(y_1 + y_2\right) = 0$$

или, вводя обозначение $z = y_1 + y_2$, имеем $z'' + z = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\, i$, поэтому

$$z = y_1 + y_2 = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

С другой стороны, из третьего уравнения системы следует, что $y_1 - y_2 = 2\cos x$. Отсюда

$$\begin{cases} 2y_1 = c_1\cos x + c_2\sin x + 2\cos x, \\ 2y_2 = c_1\cos x + c_2\sin x - 2\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{c_1}{2}\cos x + \dfrac{c_2}{2}\sin x + \cos x, \\ y_2 = \dfrac{c_1}{2}\cos x + \dfrac{c_2}{2}\sin x - \cos x \end{cases}$$

и $\lambda(x) = 2y_2 + 2y_2'' = 0.$

Определим постоянные c_1 и c_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} \dfrac{c_1}{2}+1=1, \\ \dfrac{c_1}{2}-1=-1, \\ \dfrac{c_2}{2}=1, \\ \dfrac{c_2}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0, \\ c_2=2 \end{cases}$$

Следовательно

$$y_1^0\left(x\right)=\sin x+\cos x,\; y_2^0\left(x\right)=\sin x-\cos x.$$

Пример 2 (задача о геодезических линиях). Найти минимум функционала $L[y(x),z(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}dx$ при условии связи $\varphi(x,y,z)=0$ и граничных условиях

$$y(x_0)=y_0,\, y(x_1)=y_1,\; z(x_0)=z_0,\; z(x_1)=z_1. \tag{51}$$

Составим функцию Лагранжа

$$\tilde{F}=\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)\varphi(x,y,z)$$

и запишем систему уравнений Эйлера, а также условие связи $\varphi(x,y,z)=0$:

$$\begin{cases} \lambda(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0, \\ \lambda(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0, \\ \varphi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Из этих трех уравнений с учетом граничных условий (51) определяются искомые функции $y(x)$ и $z(x)$.

2. Задачи на условный экстремум с дифференциальными связями. Рассмотрим множество M допустимых вектор - функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям а), б) пункта 1 и

в) функции $y_i(x)$ при всех $x\in[x_0,x_1]$ удовлетворяют дифференциальным связям

$$\varphi_j(x,y_1(x),..,y_n(x),y_1'(x),..,y_n'(x))=0,\quad j=\overline{1,m},\; m<n, \tag{52}$$

где функции $\varphi_j(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n')=0,\;\; j=\overline{1,m},$ непрерывно дифференцируемы по всем аргументам.

Предполагается, что уравнения (52) независимы, т.е.

$$rang\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1'} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n'} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_1'} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_n'} \end{pmatrix}=m.$$

Среди допустимых вектор - функций $y(x)$, принадлежащих классу M, требуется найти вектор - функцию $y_0(x)$, на которой функционал (46) достигает экстремума.

Сформулированная задача называется **задачей Лагранжа** (опубликована в 1788 г. в "Аналитической механике").

Теорема (необходимые условия экстремума). *Если на вектор - функции* $y_0(x) = (y_i^0(x),.., y_n^0(x)) \in M$ *функционал (46) достигает экстремума, то функции* $y_1^0(x),.., y_n^0(x)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$\tilde{F}_{y_i} - \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_i'} = 0,\ i = \overline{1,n},$$

где $\tilde{F}(x, y_1,.., y_n, y_1',.., y_n') = F(x, y_1,.., y_n, y_1',.., y_n')dx + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\varphi_j(x, y_1,.., y_n, y_1',.., y_n').$

<u>Доказательство</u> проводится аналогично случаю 1.

Пример 3. Найти экстремаль функционала

$$V\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \int_0^1 \left[y_1^2(x) + 2y_1'^2(x) + y_2'^2(x)\right]dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_1(1) = e + e^{-1}, y_2(1) = 2e - e^{-1}$ и дифференциальной связи $y_1' - y_2 = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$\tilde{F} = y_1^2 + 2y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda(x)(y_1' - y_2).$$

Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$\tilde{F}_{y_1} = 2y_1;\quad \tilde{F}_{y_1'} = 4y_1' + \lambda(x);\quad \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_1'} = 4y_1'' + \lambda'(x);$$

$$\tilde{F}_{y_2} = -\lambda(x);\quad \tilde{F}_{y_2'} = 2y_2';\quad \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_2'} = 2y_2'',$$

то имеем

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_1'' - \lambda'(x) = 0, \\ -\lambda(x) - 2y_2'' = 0, \\ y_1' - y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda'(x) = 2y_1 - 4y_1'', \\ \lambda(x) = -2y_2'', \\ y_2 = y_1' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y_1 - 4y_1'' = -2y_1^{IV}, \\ \lambda(x) = -2y_2'', \\ y_2 = y_1' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^{IV} - 2y_1'' + 2y_1 = 0, \\ y_2 = y_1', \\ \lambda(x) = -2y_2''. \end{cases}$$

Решим отдельно первое уравнение системы.

Характеристическое уравнение системы имеет вид.

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1,\quad \lambda_{3,4} = -1.$$

Следовательно

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x}, \\ y_2(x) = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x - c_3e^{-x} + c_4e^{-x} - c_4xe^{-x}. \end{cases}$$

Определим постоянные c_1, c_2, c_3 и c_4 из граничных условий:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1, \\ c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 0, \\ (c_1 + c_2)e + (c_3 + c_4)e^{-1} = e + e^{-1}, \\ (c_1 + 2c_2)e - c_3 e^{-1} = 2e - e^{-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1, \\ c_1 + c_2 = c_3 - c_4, \\ (c_3 - c_4)e + (c_3 + c_4)e^{-1} = e + e^{-1}, \\ (c_1 + 2c_2)e - c_3 e^{-1} = 2e - e^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3\left(e + e^{-1}\right) + c_4\left(-e + e^{-1}\right) = e + e^{-1}, \\ c_1 = 1 - c_3, \\ c_2 = 2c_3 - c_4 - 1, \\ (c_1 + 2c_2)e - c_3 e^{-1} = 2e - e^{-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_3 = \dfrac{e^2 - 1}{e^2 + 1}c_4 + 1, \\ c_1 = -\dfrac{e^2 - 1}{e^2 + 1}c_4, \\ c_2 = \dfrac{e^2 - 3}{e^2 + 1}c_4 + 1, \\ \left(\dfrac{e^2 - 5}{e^2 + 1}c_4 + 2\right)e - \left(\dfrac{e^2 - 1}{e^2 + 1}c_4 + 1\right)e^{-1} = 2e - e^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_4 = 0, \\ c_3 = 1, \\ c_1 = 0, \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$y_1^0(x) = xe^x + e^{-x}, \; y_2^0(x) = (x+1)e^x - e^{-x}.$$

3. Задачи на условный экстремум с интегральными связями. Рассмотрим множество M допустимых вектор – функций $y(x) = (y_1(x),..,y_n(x))$, удовлетворяющих условиям а), б) пункта 1 и

в) функции $y_i(x)$ удовлетворяют интегральным связям

$$\int_{x_0}^{x_1} h_j(x, y_1(x),.., y_n(x), y_1'(x),.., y_n'(x))dx, = L_j, \; j = \overline{1,s}, \tag{53}$$

где функции $h_j(x, y_1,.., y_n, y_1',.., y_n')$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным, L_j - заданные числа. Количество s интегральных связей может быть больше, меньше, равно n.

Среди допустимых вектор - функций $y(x)$, принадлежащих классу M, требуется найти вектор - функцию $y_0(x)$, на которой функционал (46) достигает экстремума.

Сформулированную задачу называют **изопериметрической**, рассматривая её как обобщение классической задачи определения среди плоских фигур одинакового периметра такой фигуры, которая имеет наибольшую площадь.

Отметим, что изопериметрическую задачу (44), (46), (53) можно свести к задаче Лагранжа, если ввести новые функции

$$\psi_j(x) = \int_{x_0}^{x} h_j(t, y_1(t),.., y_n(t), y_1'(t),.., y_n'(t))dt, \; j = \overline{1,s}. \tag{54}$$

Тогда вместо интегральных соотношений (53) получим дифференциальные соотношения

$$\psi_j'(x) = h_j(x, y_1(x),.., y_n(x), y_1'(x),.., y_n'(x)), \; j = \overline{1,s}, \tag{55}$$

при этом согласно (53) и (54) имеем

$$\psi_j(x_0)=0,\ \psi_j(x_1)=L_j,\ j=\overline{1,s}. \qquad (56)$$

Таким образом, изопериметрическая задача эквивалентна следующей задаче Лагранжа: найти систему $n+s$ функций $y_1(x),..,y_n(x),\psi_1(x),..,\psi_s(x)$, связанных соотношениями (55) и удовлетворяющих граничным условиям (44) для функций $y_i(x),\ i=\overline{1,n}$ и условиям (56) для функций $\psi_j(x),\ j=\overline{1,s}$, которая доставляет экстремум функционалу (46).

Теорема (необходимые условия экстремума). *Если на вектор - функции* $y_0(x)=(y_i^0(x),..,y_n^0(x))\in M$ *функционал (46) достигает экстремума, то функции* $y_1^0(x),..,y_n^0(x)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$\tilde{F}_{y_i}-\frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_i'}=0,\ i=\overline{1,n},$$

где $\tilde{F}(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n')=F(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n')dx+\sum_{j=1}^{s}\lambda_j h_j(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n').$

Доказательство опирается на возможность приведения изопериметрической задачи к задаче Лагранжа и теорему из пункта 2.

Пример 4. Найти экстремаль функционала

$$V\left[y_1(x),y_2(x)\right]=\int_0^1 y_1'(x)y_2'(x)dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0)=y_2(0)=y_1(1)=0,\ y_2(1)=1$ и интегральным связям $\int_0^1 y_1(x)dx=1,\ \int_0^1 y_2(x)dx=0$.

Составим функцию Лагранжа $\tilde{F}=y_1'y_2'+\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$.

Запишем систему уравнений Эйлера. Так как

$$\tilde{F}_{y_1}=\lambda_1;\quad \tilde{F}_{y_1'}=y_2';\quad \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_1'}=y_2'';$$

$$\tilde{F}_{y_2}=\lambda_2;\quad \tilde{F}_{y_2'}=y_1';\quad \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_2'}=y_1'',$$

то имеем

$$\begin{cases}\lambda_1-y_2''=0,\\ \lambda_2-y_1''=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_2''=\lambda_1,\\ y_1''=\lambda_2.\end{cases}$$

Найдём общее решение системы и выражения для λ_1 и λ_2:

$$\begin{cases}y_1''=\lambda_1,\\ y_2''=\lambda_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1'=\lambda_1 x+c_1,\\ y_2'=\lambda_2 x+c_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1(x)=\dfrac{\lambda_1}{2}x^2+c_1x+c_2,\\[2mm] y_2(x)=\dfrac{\lambda_2}{2}x^2+c_3x+c_4.\end{cases}$$

В силу условий связи

$$\int_0^1 y_1(x)dx=\int_0^1\left[\frac{\lambda_2}{2}x^2+c_1x+c_2\right]dx=\left[\frac{\lambda_2}{6}x^3+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x\right]\Bigg|_0^1=\frac{\lambda_2}{6}+\frac{c_1}{2}+c_2=1,$$

$$\int_0^1 y_2(x)dx=\int_0^1\left[\frac{\lambda_1}{2}x^2+c_3x+c_4\right]dx=\left[\frac{\lambda_1}{6}x^3+\frac{c_3}{2}x^2+c_4x\right]\Bigg|_0^1=\frac{\lambda_1}{6}+\frac{c_3}{2}+c_4=0.$$

Определим постоянные c_1, c_2, c_3 и c_4 из граничных условий и полученных соотношений:

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ c_4 = 0, \\ \dfrac{\lambda_2}{2} + c_1 + c_2 = 0, \\ \dfrac{\lambda_1}{2} + c_3 + c_4 = 1, \\ \dfrac{\lambda_2}{6} + \dfrac{c_1}{2} + c_2 = 1, \\ \dfrac{\lambda_1}{6} + \dfrac{c_3}{2} + c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ c_4 = 0, \\ \lambda_2 = -2c_1, \\ \lambda_1 = 2 - 2c_3, \\ \lambda_2 = 6 - 3c_1, \\ \lambda_1 = -3c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ c_4 = 0, \\ c_3 = -2, \\ c_1 = 6, \\ \lambda_2 = -12, \\ \lambda_1 = 6. \end{cases}$$

Следовательно

$$y_1^0(x) = -6x^2 + 6x, \; y_2^0(x) = 3x^2 - 2x.$$

Пример 5 (задача Дидоны). Исследовать на экстремум функционал $S[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)dx$ при условии связи $\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = L$ и граничных условиях $y(x_0) = y_0, \, y(x_1) = y_1$.

Составим функцию Лагранжа $\tilde{F} = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$ и запишем уравнение Эйлера

$$1 - \frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + c_1 \quad \text{или} \quad x = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - c_1.$$

Введем параметр $y' = tgp \Rightarrow x = \lambda \sin p - c_1$, $\; dx = \lambda \cos pdp$. Тогда

$$dy = y' dx = tgp \cdot \lambda \cdot \cos pdp = \lambda \sin pdp \Rightarrow y = -\lambda \cos p + c_2.$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} x = \lambda \sin p - c_1, \\ y = -\lambda \cos p + c_2 \end{cases} \Rightarrow (x + c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2.$$

Постоянные c_1, c_2, λ определяются из граничных условий $y(x_0) = y_0, \, y(x_1) = y_1$ и условия связи $\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = L.$

Пример 6. Мерой неопределенности непрерывной случайной величины X с известной плотностью вероятности $f(x)$ является дифференциальная энтропия $H[X]$, определяемая формулой

$$H[X] = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x)dx,$$

причем $f(x)\ln f(x) = 0$ для тех значений x, где $f(x) = 0$.

Среди всех законов распределения на $\mathbb{R}$ непрерывной случайной величины X, для которой задана одна и та же дисперсия σ^2, найти закон распределения с максимальной дифференциальной энтропией.

Таким образом, требуется найти максимум функционала

$$V[f(x)] = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x)dx$$

при дополнительных условиях

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f(x)dx = \sigma^2,$$

где $\overline{x}$ – математическое ожидание случайной величины X.

Функция Лагранжа в данном случае имеет вид

$$L = -f \ln f + \lambda_1 f + \lambda_2 (x - \overline{x})^2 f.$$

Следовательно, уравнение Эйлера для определения $f(x)$ имеет вид

$$-\ln f - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 (x - \overline{x})^2 = 0,$$

откуда

$$f(x) = Ce^{\lambda_2 (x-\overline{x})^2}, \text{ где } C = e^{\lambda_1 - 1}.$$

Из дополнительных условий находим

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}.$$

Можно показать, что найденное решение $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}$ соответствует максимуму энтропии.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Последняя цифра номера зачетки совпадает с последней цифрой номера примера.

I. Решить простейшую вариационную задачу:

1. $V[y(x)]=\int_1^e\left(\frac{2y(x)}{x}+y(x)y'(x)+x^2y'^2(x)\right)dx, \quad y(1)=1, \quad y(e)=0;$

2. $V[y(x)]=\int_1^3\left(2y(x)-y(x)y'(x)+xy'^2(x)\right)dx, \quad y(1)=1, \quad y(3)=4;$

3. $V[y(x)]=\int_0^{\pi/4}\left(4y^2(x)+y'^2(x)+8y(x)\right)dx, \quad y(0)=-1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0;$

4. $V[y(x)]=\int_0^1\left(y'^2(x)+y^2(x)+2e^{2x}y(x)\right)dx, \quad y(0)=\frac{1}{3}, \quad y(1)=\frac{1}{3}e^2;$

5. $V[y(x)]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2(x)+4y^2(x)+2y(x)\cos x\right)dx, \quad y(0)=\frac{4}{5}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\pi};$

6. $V[y(x)]=\int_{-2}^{-1}\left(x^2y'^2(x)+12y^2(x)\right)dx, \quad y(-2)=\frac{1}{16}, \quad y(-1)=1;$

7. $V[y(x)]=\int_1^2\left(2y(x)+y(x)y'(x)+x^2y'^2(x)\right)dx, \quad y(1)=0, \quad y(2)=1+\ln 2;$

8. $V[y(x)]=\int_0^{\pi}\left((y'(x)+y(x))^2+2y(x)\sin x\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y(\pi)=1;$

9. $V[y(x)]=\int_{-4}^{4}\sqrt{y(x)(1+y'^2(x))}dx, \quad y(-4)=5, \quad y(4)=5;$

10. $V[y(x)]=\int_1^2\left(\frac{3y^2(x)}{x^3}+\frac{y'^2(x)}{x}+8y(x)\right)dx, \quad y(1)=0, \quad y(2)=8\ln 2;$

11. $V[y(x)]=\int_1^2\left(y'^2(x)+\frac{6y^2(x)}{x^2}-32y(x)\ln x\right)dx, \quad y(1)=3, \quad y(2)=4(4\ln 2+3);$

12. $V[y(x)]=\int_1^2\left(x^2y'^2(x)+2y^2(x)+32x^2y(x)\ln x\right)dx, \quad y(1)=-5, \quad y(2)=4(4\ln 2-5);$

13. $V[y(x)]=\int_0^3\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}dx, \quad y(0)=1, \quad y(3)=4;$

14. $V[y(x)]=\int_1^2\left(xy'^2(x)+2y(x)y'(x)\right)dx, \quad y(1)=0, \quad y(2)=\ln 2;$

15. $V[y(x)]=\int_1^2\left(xy'^2(x)+y(x)y'(x)+xy(x)\right)dx, \quad y(1)=\frac{1}{8}, \quad y(2)=\frac{1}{2}-\ln 2;$

16. $V[y(x)]=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(y(x)-\frac{1}{2}y'^2(x)\right)\sin x dx, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\ln\sqrt{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

17. $V[y(x)]=\int_1^2\frac{x^2y'^2(x)}{2x^3+1}dx, \quad y(1)=0, \quad y(2)=\frac{7}{2};$

18. $V[y(x)]=\int_0^1\left((1+x)e^xy(x)+\frac{1}{2}e^xy'^2(x)\right)dx, \quad y(0)=1, \quad y(1)=\frac{3}{2};$

19. $V[y(x)]=\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{3y^2(x)}{x^3}+x^2+\frac{y'^2(x)}{x}\right)dx,\quad y(1)=2,\quad y(2)=8\frac{1}{2};$

20. $V[y(x)]=\int\limits_{1}^{4}\left(\sqrt{x}y'^2(x)+\frac{y^2(x)}{2x\sqrt{x}}\right)dx,\quad y(1)=2,\quad y(4)=4\frac{1}{2};$

21. $V[y(x)]=\int\limits_{2}^{7}\left(\cos x+3x^2y(x)+(x^3-y^2(x))y'(x)\right)dx,\quad y(2)=3,\quad y(7)=0;$

22. $V[y(x)]=\int\limits_{-2}^{-1}\left(2y(x)y'(x)-x^2y'^2(x)\right)dx,\quad y(-2)=\frac{3}{2},\quad y(-1)=2;$

23. $V[y(x)]=\int\limits_{0}^{1}\left(xy(x)y'(x)-2y'^2(x)\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\operatorname{ch}\frac{1}{2};$

24. $V[y(x)]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(y'^2(x)+2y(x)y'(x)+4y^2(x)\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sh}\pi;$

25. $V[y(x)]=\int\limits_{1}^{5}\frac{2y'^3(x)+y'^2(x)}{y'^4(x)+2}dx,\quad y(1)=2,\quad y(5)=14;$

26. $V[y(x)]=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^3y'^2(x)+3xy^2(x)-\frac{6y(x)}{x}\right)dx,\quad y(-2)=\frac{1}{4},\quad y(-1)=1;$

27. $V[y(x)]=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(y'^2(x)-6y(x)\sin x\right)\cos^2 x dx,\quad y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1,\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1;$

28. $V[y(x)]=\int\limits_{0}^{1}\left(e^x(y'(x)-x)^2+2y(x)\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\frac{1}{2};$

29. $V[y(x)]=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^3y'^2(x)+3xy^2(x)\right)dx,\quad y(-2)=\frac{15}{8},\quad y(-1)=0;$

30. $V[y(x)]=\int\limits_{1}^{2}\left((xy'(x)+y(x))^2+(1+x^2)y'(x)\right)dx,\quad y(1)=-\frac{1}{2},\quad y(2)=1;$

31. $V[y(x)]=\int\limits_{0}^{2}\left(4y'^2(x)+y^2(x)-6e^xy'(x)\right)dx,\quad y(0)=2,\quad y(2)=e^{-1}+e^2;$

32. $V[y(x)]=\int\limits_{1}^{2}\left(y(x)x^2-y(x)+xy^2(x)y'(x)\right)dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=\sqrt{3};$

33. $V[y(x)]=\int\limits_{0}^{\pi}\left(y'^2(x)+8y'(x)\sin^2 x+4y(x)\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=\pi^2;$

34. $V[y(x)]=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2(x)+y^2(x)+x^2y'(x)\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=1+e^{-1};$

35. $V[y(x)]=\int\limits_{0}^{\pi}\left(y'^2(x)+y^2(x)-4y(x)\sin x\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(\pi)=e^{\pi};$

36. $V[y(x)]=\int\limits_{0}^{\pi}\left(y'^2(x)+y^2(x)+10y'(x)(x+\sin^2 x)\right)dx,\quad y(0)=6,\quad y(\pi)=5+e^{-\pi};$

37. $V[y(x)]=\int\limits_{-1}^{1}e^x\left(y'^2(x)+6y^2(x)\right)dx,\quad y(-1)=0,\quad y(1)=e^7-e^{-3};$

38. $V[y(x)]=\int\limits_{1}^{2}\left(x^2y'^2(x)+y(x)y'(x)+12xy(x)\right)dx,\quad y(1)=1,\quad y(2)=5;$

39. $V[y(x)]=\int\limits_1^2\left(24x^3y(x)-y(x)y'(x)-x^2y'^2(x)\right)dx,\quad y(1)=1,\quad y(2)=-7.$

40. $V[y(x)]=\int\limits_1^4\left(y'^2(x)+\dfrac{3y^2(x)}{4x^2}\right)dx,\quad y(1)=1,\quad y(4)=8.$

II. Решить задачу с подвижным или свободным концом:

1. $V[y(x)]=\int\limits_0^2\left(2xy(x)+y'^2(x)\right)dx,\quad y(0)=0;$

2. $V[y(x)]=\int\limits_0^1\left(2y(x)+6y'(x)+y'^2(x)\right)dx,\quad y(0)=0;$

3. $V[y(x)]=\int\limits_1^2\left(x^2y'^2(x)+6y^2(x)+2x^3y(x)\right)dx,\quad y(1)=\dfrac{1}{6};$

4. $V[y(x)]=\int\limits_0^1\left(y(x)+xy'(x)+y'^2(x)\right)dx,\quad y(0)=0;$

5. $V[y(x)]=\int\limits_1^2\left(x^2y'^2(x)+12y^2(x)\right)dx,\quad y(1)=97;$

6. $V[y(x)]=\int\limits_1^2\left(\dfrac{y'^2(x)}{x}+\dfrac{3y^2(x)}{x^3}\right)dx,\quad y(2)=\dfrac{19}{2};$

7. $V[y(x)]=\int\limits_1^2\left(x^3y'^2(x)+3xy^2(x)\right)dx,\quad y(2)=\dfrac{49}{24};$

8. $V[y(x)]=\int\limits_1^2\left(x^3y'^2(x)-8(x^2-x)y(x)y'(x)+4y^2(x)+8x^2y'(x)\right)dx,\quad y(2)=-7;$

9. $V[y(x)]=\int\limits_1^3\left(8y(x)y'(x)\ln x-xy'^2(x)+6xy'(x)\right)dx,\quad y(3)=15;$

10. $V[y(x)]=\int\limits_1^2\left(\dfrac{1}{2}y'^2(x)-\dfrac{2(x-1)}{x}y(x)y'(x)-\dfrac{8y'(x)}{x}\right)dx,\quad y(2)=10;$

11. $V[y(x)]=\int\limits_1^{x_1}y'^2(x)dx,\quad y(0)=0,\quad y_1=-x_1-1;$

12. $V[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)}dx,\quad y_0=x_0^2,\quad y_1=x_1-5;$

13. $V[y(x)]=\int\limits_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{y(x)}dx,\quad y(0)=1,\quad y_1=x_1-1;$

14. $V[y(x)]=\int\limits_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{x-3}dx,\quad y(0)=0,\quad y_1+4x_1-4=0;$

15. $V[y(x)]=\int\limits_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{x-1}dx,\quad y(0)=0,\quad (y_1-1)^2+(x_1-5)^2-4=0;$

16. $V[y(x)]=\int\limits_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{y(x)}dx,\quad y(0)=0,\quad y_1=x_1-10;$

17. $V[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)}dx,\quad y_0=x_0^2,\quad y_1=x_1-1;$

18. $V[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)}dx,\quad y_0{}^2+x_0^2=1,\quad y_1{}^2+(x_1-10)^2=4;$

19. $V[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2(x)}dx, \quad y_0 = x_0^2 + 2, \quad y_1 = x_1;$

20. $V[y(x)] = \int\limits_{1}^{x_1} \sqrt{1+y'^2(x)}dx, \quad y(1) = 0, \quad 9y_1^2 + 4x_1^2 = 36.$

III. Решить задачу на условный экстремум:

1. $V[y(x)] = \int\limits_0^{\pi} y'^2(x)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi, \quad \int\limits_0^{\pi} y(x)\sin x dx = 0;$

2. $V[y(x)] = \int\limits_0^{1} y'^2(x)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e-3, \quad \int\limits_0^{1} y(x)e^x dx = 0;$

3. $V[y(x)] = \int\limits_0^{1} y'^2(x)dx, \quad y(0) = 2e+1, \quad y(1) = 2, \quad \int\limits_0^{1} y(x)e^{-x} dx = e;$

4. $V[y(x)] = \int\limits_0^{1} y'^2(x)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2, \quad \int\limits_0^{1} xy(x)dx = 1;$

5. $V[y(x)] = \int\limits_0^{1} \left(y^2(x) + y'^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -1, \quad \int\limits_0^{1} y(x)e^{-x}dx = \dfrac{3e^{-1}-e}{4};$

6. $V[y(x)] = \int\limits_0^{1} \left(y^2(x) + y'^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 4e, \quad \int\limits_0^{1} y(x)e^{x}dx = 1+e^2;$

7. $V[y(x)] = \int\limits_0^{1} \left(2xy(x) + y'^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 3, \quad \int\limits_0^{1} xy(x)dx = 1;$

8. $V[y(x)] = \int\limits_1^{2} xy'^2(x)dx, \quad y(1) = 0, \quad y(21) = 12, \quad \int\limits_1^{2} xy(x)dx = 9;$

9. $V[y(x)] = \int\limits_0^{\pi} \left(2y(x) + 3y'(x) + y'^2(x)\right)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi^2, \quad \int\limits_0^{\pi} y(x)\sin x dx = \pi^2 - 1;$

10. $V[y(x)] = \int\limits_0^{\pi} \left(y'^2(x) + y^2(x) + 2y(x)\cos x\right)dx, \quad y(0) = 2, \quad y(\pi) = -2, \quad \int\limits_0^{\pi} y(x)\cos x dx = \pi;$

11. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int\limits_0^{1} \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x)\right)dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = 0,$

$y_1'(x) - y_2(x) = 0;$

12. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int\limits_0^{1} \sqrt{1 + y_1'^2(x) + y_2'^2(x)}dx, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(0) = 2, \quad y_2(1) = 1,$

$2y_1(x) - y_2(x) - 3x = 0;$

13. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} \left(y_1'^2(x) - y_2'^2(x)\right)dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2},$

$y_1'(x) - y_2(x) - \sin x = 0;$

14. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int\limits_0^{1} \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x)\right)dx, \quad y_1(0) = -1, \quad y_1(1) = -1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = 1,$

$y_1(x) + y_2(x) - 2x^2 + x + 1 = 0;$

15. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int\limits_0^{1} \left(y_1^2(x) + 2y_1'^2(x) + y_2'^2(x)\right)dx, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = e + e^{-1},$

$y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = 2e - e^{-1}, \quad y_1'(x) - y_2(x) = 0;$

16. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^1 \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x) + 1 \right) dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = 0,$

$y_1(x) + y_2(x) - 2x^2 = 0;$

17. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^\pi \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x) \right) dx, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi) = \frac{\pi}{2},$

$y_1'(x) - y_2(x) - x\cos x = 0;$

18. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^1 \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x) + x^3 \right) dx, \quad y_1(0) = 2, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = 2,$

$y_1(x) - 2y_2(x) + 3x = 0;$

19. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x) + 2y_1(x)y_2(x) \right) dx, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1,$

$y_2(0) = -1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1, \quad y_1'(x) + y_2'(x) - 4x = 0;$

20. $V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^1 \left(y_1'^2(x) + 2y_1(x)y_2(x) + y_2'^2(x) \right) dx, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = e,$

$y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e^{-1}, \quad y_1(x) - y_2(x) - e^x + e^{-x} = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. – М.: ИЛ, 1950.
2. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999.
3. Васильев В. В. Тринадцать лекций по основам вариационного исчисления. – Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1989.
4. Васильев О. В., Аргучинцев А. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Физматлит, 1999.
5. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
6. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. – М.:Физматгиз, 1961.
7. Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. – М.: Изд-во МГУ, 1985.
8. Коша А. Вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 1983.
9. Краснов М.Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973.
10. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. – М.: Гостехиздат, 1950.
11. Пантелеев А. В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. – М.: Высш. школа, 2006.
12. Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление. – М.: КомКнига, 2006.