Приложение А. Метод Эйлера численного интегрирования ОДУ

Метод Эйлера — это численный алгоритм решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с заданным начальным значением (т.е. задачи Коши). Он является простейшим представителем класса явных методов интегрирования и простейшим методом типа Рунге–Кутты. Назван в честь Леонарда Эйлера, впервые описавшего его как общую схему решения ОДУ примерно в 1768–70 гг.

Метод Эйлера является методом первого порядка, то есть локальная погрешность (погрешность на шаге) пропорциональна квадрату шага разбиения, а глобальная погрешность (погрешность на интервале) пропорциональна шагу разбиения. Простота реализации метода оборачивается невысокой точностью и, как следствие, проблемами с устойчивостью (возможно быстрое накопление ошибки, т.к. для достижения нужной точности требуется много шагов). Поэтому метод Эйлера на практике не используется, а служит лишь базисом для построения более сложных методов.

Изложим идею метода. Пусть необходимо решить следующую задачу Коши:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [x_0, x_f], \quad y(x_0) = y_0.$$

Задавшись размером шага h, построим разбиение интервала $[x_0, x_f]$ точками $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, \ldots, m$. Значения функций в точках разбиения будем для краткости обозначать $y(x_i) = y_i$. Приближенным решение задачи Коши будет, таким образом, вектор $(y_0, y_1, \ldots, y_m)^T$.

В начале нам известно лишь значение y_0. Чтобы узнать y_1, разложим решение ОДУ в ряд Тейлора в малой окрестности точки x_0:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_0)(x - x_0)^2 + O\left((x - x_0)^3\right).$$

Значит, в точке $x_1 = x_0 + h$ получаем

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + O\left(h^3\right).$$

Если теперь мы вспомним, что $y' = f(x, y)$ и ограничимся в разложении только линейным членом, отбросив квадратичный и выше, то получим приближенное равенство:

$$y_1 \approx y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Обобщая это правило, получаем формулу перехода из точки x_i в точку x_{i+1}, которая и представляет собой основную формулу метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Таким образом, для получения приближенного решения достаточно одного цикла по точкам разбиения.

Из разложения в ряд Тейлора видно, что погрешность решения на одном шаге имеет порядок h^2 (мы отбросили все слагаемые, начиная с пропорционального h^2). С другой стороны, количество шагов, равное $\dfrac{x_f - x_0}{h}$, обратно пропорционально длине шага разбиения. Поэтому глобальная погрешность на всем интервале есть величина $O(h)$ и метод Эйлера имеет первый порядок точности.