Лабораторная работа №3.

Метод переноса граничных условий. Метод Абрамова.

Задание. Решить численно предложенные простейшие вариационные задачи и задачу оптимального управления, сведя их к линейной краевой задаче и применив к последней метод переноса граничных условий и метод Абрамова. Сравнить графически полученные решения с решениями, полученными аналитически (где это возможно).

Во всех вариантах в задании c) предлагается решить линейную задачу оптимального управления с квадратичным функционалом качества типа Больца. Управляемый процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -2 & m \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & m+1 \end{pmatrix} u \qquad (*)$$

на промежутке $t = [0, 10]$ и с начальным условием $x(0) = (1, 1)^T$. Критерий качества, который нужно минимизировать, имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}^T x(10) + \frac{1}{2} \int\limits_0^{10} \left[x^T(t) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} x(t) + u^T(t) \begin{pmatrix} m+1 & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix} u(t) \right] dt\ . \qquad (**)$$

Применяя принцип максимума, задачу можно свести к линейной краевой задаче. Значения параметров k и m для каждого варианата указаны ниже.

Оценка. Баллы за выполнение лабораторной работы распределяются следующим образом:

№	**Подзадача**	**Балл**
1	Реализация метода переноса граничных условий для задачи a)	2
2	Реализация метода Абрамова для задачи a)	2
3	Реализация метода переноса граничных условий для задачи b)	2
4	Реализация метода Абрамова для задачи b)	2
5	Реализация метода переноса граничных условий для задачи c)	4
6	Реализация метода Абрамова для задачи c)	4
7	Аналитическое решение исходных вариационных задач, сравнение полученных решений	4
	ИТОГО	20

Варианты заданий

Вариант 1.

a) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2 \right) dx; \quad y(-1) = 3; \quad y(1) = 1;$

b) $J(y) = \int\limits_{0}^{2} \left(y'^2 - 4y' e^{2x} + \sin^2 x \right) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = -2;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 1$, $m = 10$.

Вариант 2.

a) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2\right) dx;\quad y(-1) = 2;\quad y(1) = 4;$

b) $J(y) = \int\limits_{0}^{2} \left(y'^2 - 4y' \sin 2x - x^2\right) dx;\quad y(0) = 1;\quad y(2) = -1;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 2$, $m = 9$.

Вариант 3.

a) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 + 4y^2 + 4x^2 y + x\cos x\right) dx;\quad y(-1) = 2;\quad y(1) = 0.5;$

b) $J(y) = \int\limits_{0}^{2} \left(y'^2 - 4y' \cos 2x + 5\sin 3x\right) dx;\quad y(0) = 2;\quad y(2) = -3;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 3$, $m = 8$.

Вариант 4.

a) $J(y) = \int\limits_{0}^{2} \left(y'^2 + 9y^2 + 2xy - x\sin x\right) dx;\quad y(0) = 1;\quad y(2) = 2;$

b) $J(y) = \int\limits_{1}^{3} \left(y'^2 - \frac{4y'}{x} + x\sin x\right) dx;\quad y(1) = 1;\quad y(3) = -2;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 4$, $m = 7$.

Вариант 5.

a) $J(y) = \int\limits_{-2}^{0} \left(y'^2 - 4y^2 + 2y + xe^{2x}\right) dx;\quad y(-2) = 0;\quad y(0) = 1;$

b) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 - 2y'e^x + \cos x\right) dx;\quad y(-1) = 2;\quad y(1) = 3;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 5$, $m = 6$.

Вариант 6.

a) $J(y) = \int\limits_{0}^{1} \left(y'^2 - 9y^2 + 2y\sin x - x^2 e^x\right) dx;\quad y(0) = 1;\quad y(1) = -1;$

b) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 - \frac{2y'}{1+x^2} + e^{2x}\right) dx;\quad y(-1) = 0;\quad y(1) = 3;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 6$, $m = 5$.

Вариант 7.

a) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 + 4y^2 + 6ye^x + 2x\cos x\right) dx;\quad y(-1) = 1;\quad y(1) = 3;$

b) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 + 4y'e^x\cos x - \sin x\right) dx;\quad y(-1) = 1;\quad y(1) = 2;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 7$, $m = 4$.

Вариант 8.

a) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 + y^2 + 4ye^x - x\sin x\right) dx;\quad y(-1) = 1;\quad y(1) = 3;$

b) $J(y) = \int\limits_{1}^{3} \left(y'^2 - y'\ln x + 2x\right) dx;\quad y(1) = 2;\quad y(3) = -1;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 8$, $m = 3$.

Вариант 9.

a) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 + 4y^2 + 8ye^{2x} + 3x^2\right) dx;\quad y(-1) = 1;\quad y(1) = 3;$

b) $J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y' + y'^2\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx;\quad y(-1) = 1;\quad y(1) = -2;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 9$, $m = 2$.

Вариант 10.

a) $J(y) = \int\limits_{0}^{2} \left(2y'^2 + 2y^2 + y\cos x - 5x\right) dx;\quad y(0) = 2;\quad y(2) = 2;$

b) $J(y) = \int\limits_{1}^{3} \left(y' + y'^2\sin^2 x + e^{2x}\right) dx;\quad y(1) = -1;\quad y(3) = 4;$

c) Задача $(*), (**)$ с параметрами $k = 10$, $m = 1$.