Метод переноса граничных условий.Метод Абрамова.

Рассмотрим следующую линейную краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + f(t), \qquad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n \\ l_s^T x(t_s) = \alpha_s, \quad t_s \in [t_0, T], \quad l_s \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha_s \in \mathbb{R}, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Будем говорить, что s-ое условие перенесено из точки t_s в точку T, если можно определить независимо от решения уравнения $x(t)$ вектор-функцию $l(t)$ и скалярную функцию $\alpha(t)$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} &l^T(t)x(t) = \alpha(t), \quad t \in [t_s, T] \\ &l(t_s) = l_s, \qquad \alpha(t_s) = \alpha_s. \end{aligned}$$

Если таким образом можно перенести все краевые условия в одну точку, мы получим задачу Коши, эквивалентную исходной краевой.

Покажем, каким образом можно реализовать перенос условий. Пусть $x(t)$ — некоторое решение краевой задачи. Нетрудно проверить, что

$$\frac{d}{dt}\left(l^T x\right) = \dot{l}^T x + l^T \dot{x} = \dot{l}^T x + l^T (Ax + f) = \dot{l}^T x + l^T A x + l^T f = \dot{l}^T x + \left(A^T l\right)^T x + l^T f$$

Выберем $l(t)$ таким образом, чтобы $\dot{l} = -A^T l$ и введем $\alpha(t)$ так, чтобы $\dot{\alpha} = l^T f$. Значит, чтобы перенести краевое условие, необходимо, во-первых, решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{l} = -A^T l \\ l(t_s) = l_s. \end{cases}$$

Во-вторых, используя полученную функцию $l(t)$, решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = l^T f \\ \alpha(t_s) = \alpha_s. \end{cases}$$

После этого мы переносим условие в точку $t = T$:

$$l^T(T)x(T) = \alpha(T).$$

Однако одного этого уравнения мало, чтобы найти компоненты $x(T)$. Перенеся подобным же образом все n условий, мы получим систему линейных алгебраических уравнений. Решив ее, мы найдем начальное условие x_T и сможем сделать последний шаг — решить задачу Коши справа налево, найдя решение исходной краевой задачи.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + f(t) \\ x(T) = x_T. \end{cases}$$

Рассмотрим в качестве примера следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

Вначале преобразуем задачу к требуемому виду, введя новые переменные: $x_1(t) = y(t), x_2(t) = y'(t)$. Тогда задача примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_1(3) = 1 \end{matrix}$$

Какой вид в этой задаче имеют l_s и α_s? Нетрудно заметить, что первое краевое условие эквивалентно следующему:

$$1 \cdot x_1(0) + 0 \cdot x_2(0) = 0,$$

а второе

$$1 \cdot x_1(3) + 0 \cdot x_2(3) = 1.$$

Значит, $l_1 = (1, 0)^T$, $\alpha_1 = 0$, и $l_2 = (1, 0)^T$, $\alpha_2 = 1$. Перенесем, например, первое условие в точку $t = 3$. Для этого, во–первых, надо решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{l} = -A^T l \\ l(0) = l_1, \end{cases}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица системы уравнений исходной краевой задачи. Другими словами, надо решить систему

$$\begin{cases} \dot{l}^1 = l^2 \\ \dot{l}^2 = -l^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} l^1(0) = 1 \\ l^2(0) = 0 \end{matrix}$$

Нетрудно заметить, что решением является пара функций $l^1(t) = \cos t$ и $l^2(t) = -\sin t$.

Поскольку в исходной краевой задаче $f(t) = 0$, то вторая вспомагательная задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = l^T(t) f(t) = 0 \\ \alpha(0) = \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Значит, существует единственное решение $\alpha(t) = 0$. Таким образом, уравнение для переноса краевого условия имеет вид

$$\cos t \cdot x_1(t) - \sin t \cdot x_2(t) = 0.$$

Вместе со вторым краевым условие это уравнение образует систему, из которой можно найти начальные условия для исходной линейной системы:

$$\begin{cases} \cos 3 \cdot x_1(3) - \sin 3 \cdot x_2(3) = 0 \\ 1 \cdot x_1(3) + 0 \cdot x_2(3) = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим $x_1(3) = 1, x_2(3) = \operatorname{ctg} 3$.

Итак, исходная краевая задача сводится после переноса одного условия к задаче Коши:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 & x_1(3) = 1 \\ \dot{x_2} = -x_1 & x_2(3) = \operatorname{ctg} 3 \end{cases}$$

Решение ее несложно найти:

$$x_1(t) = \frac{\sin x}{\sin 3}, \qquad x_2(t) = \frac{\cos x}{\sin 3}\ .$$

Рассмотренный метод имеет очень большой недостаток: неустойчивость. Действительно, решение сопряженной системы может иметь экспоненциальный вид и расти очень быстро, в то время как решение исходной краевой задачи остается ограниченным. Это препятствие обходит метод, предложенный в 1961 году А.А. Абрамовым и ставший стандартным способом решения линейных краевых задач. Он использует неоднозначность в выборе функций $l(t)$ и $\alpha(t)$, чтобы построить эффективные уравнения переноса.

Пусть опять мы переносим s-ое условие из точки t_s в T. Попробуем найти такую функцию $g(t)$, чтобы она была «похожа» на решение сопряженной системы $l(t)$, однако норма ее оставалась постоянной. Предположим, что $g(t)$ удовлетворяет линейной системе уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{g} = -A^T(t)g(t) + h(t) \\ g(t_s) = l_s \end{cases}$$

Какой должна быть поправка $h(t)$, чтобы выполнялось условие $\|g(t)\| = \|l_s\|$? Чтобы ответить на этот вопрос, возведем в квадрат последнее равенство, возьмем производную по времени от обеих частей и воспользуемся выражением нормы через скалярное произведение:

$$\begin{aligned} &2g^T(t) \cdot \dot{g}(t) = 0, \\ &2g^T(t)\left(-A^T(t)g(t) + h(t)\right) = 0, \\ &g^T(t)h(t) = g^T(t)A^T(t)g(t). \end{aligned}$$

Наконец, предположим, что $h(t) = m(t) \cdot g(t), m(t) \in \mathbb{R}$. Подставив в последнее уравнение это выражение, получаем

$$m(t) = \frac{g^T(t)A^T(t)g(t)}{g^T(t)g(t)}.$$

Значит, необходимая нам функция $g(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\begin{cases} \dot{g} = -A^T(t)g(t) + \dfrac{g^T(t)A^T(t)g(t)}{g^T(t)g(t)}g(t) \\ g(t_s) = l_s \end{cases}$$

Аналогично получаем уравнение для скалярной функции $\alpha(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{g^T(t)A^T(t)g(t)}{g^T(t)g(t)}\alpha(t) + g^T(t)f(t) \\ \alpha(t_s) = \alpha_s\ . \end{cases}$$

Запишем в общем виде алгоритм метода Абрамова переноса граничных условий.

Вход:

- $A(t)$ — матрица $n \times n$;
- $f(t) \in \mathbb{R}^n$;
- $l_s^T x(t_s) = \alpha_s, s = 1, \ldots, n$ — линейные краевые условия;
- t^* — момент времени, в который переносятся краевые условия.

$\boxed{\mathcal{A}}$

for $s = 1, \ldots, n$ **do**

if $t_s = t^*$ **then**
  continue
else
  $\boxed{\mathcal{A}_1}$ Решаем задачу Коши от t_s до t^* слева направо

$$\begin{cases} \dot{g} = -A^T(t)g(t) + \dfrac{g^T(t)A^T(t)g(t)}{g^T(t)g(t)}g(t) \\ g(t_s) = l_s \end{cases}$$

  $\boxed{\mathcal{A}_2}$ Решаем скалярную задачу Коши от t_s до t^* слева направо

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{g^T A^T g}{g^T g}\alpha + g^T f \\ \alpha(t_s) = \alpha_s \end{cases}$$

  $\boxed{\mathcal{A}_3}$ Составляем уравнения для переноса s-го краевого условия

$$g^T(t^*)x(t^*) = \alpha(t^*)$$

$\boxed{\mathcal{B}}$
Составляем систему линейных алгебраических уравнений

$$g_s^T(t^*)x(t^*) = \alpha_s(t^*), s = 1, \ldots, n$$

и решаем ее.
$\boxed{\mathcal{C}}$
Пусть x^* — решение СЛАУ. Решаем следующую задачу Коши справа налево от t^* до t_0

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + f(t) \\ x(t^*) = x^* \end{cases}$$

Выход: $x(t), t \in [t_0, t^*]$