Антагонистические игры. Решение конфликта: кто кого победит?

Смешанное расширение бескоалиционных игр

Кичмаренко О.Д.

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

Определение антагонистической игры.

Игра

$$\Gamma =< I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i(x)\}_{i\in I} >$$

называется **антагонистической**, если в ней участвуют 2 игрока, т.е. $I = \{1, 2\}$, а сумма выигрышей первого и второго игроков постоянна и равна нулю, т.е. $\forall x \in X$ выполняется равенство $f_1(x) + f_2(x) = 0$.

Иначе говоря, выигрыши первого и второго игроков равны по модулю и противоположны по знаку (под отрицательным выигрышем здесь понимается проигрыш).

Таким образом, для задания антагонистической игры достаточно задать два множества стратегий игроков и функцию выигрыша первого игрока:

$$\Gamma =< X_1, X_2, f(x) >$$

.

Ситуация равновесия в антагонистической игре.

Ситуацией равновесия (по Нэшу) называется такая ситуация (x_1^*, x_2^*), что

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2^*) \le f_1(x_1^*, x_2^*) \quad \forall x_1 \in X_1 \\ f_2(x_1^*, x_2) \le f_1(x_1^*, x_2^*) \quad \forall x_2 \in X_2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2^*) \le f(x_1^*, x_2^*) \quad \forall x_1 \in X_1 \\ -f(x_1^*, x_2) \le -f(x_1^*, x_2^*) \quad \forall x_2 \in X_2, \end{aligned}$$

т.е.

$$f(x_1, x_2^*) \le f(x_1^*, x_2^*) \le f(x_1^*, x_2) \quad \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2.$$

Это неравенство определяет седловую точку функции $f(x)$. Таким образом, равновесными ситуациями антагонистической игры будут седловые точки её функции выигрыша.

Существование седловых точек.

Следующие теоремы позволяют исследовать функцию выигрыша на наличие седловых точек, т.е. определять имеет ли игра решение.

Теорема Если x изменяется в области X, y - в области Y, то для любой функции $f(x, y)$, определенной на $X \times Y$, имеет место неравенство

$$\sup_x \inf_y f(x, y) \leq \inf_y \sup_x f(x, y).$$

Доказательство. При любых $x \in X, y \in Y$ мы имеем

$$f(x,y) \le \sup_x f(x,y).$$

Перейдем к инфимуму по $y \in Y$ в обеих частях неравенства.

$$\inf_y f(x,y) \le \inf_y \sup_x f(x,y).$$

Справа в этом неравенстве стоит некоторая константа. Перейдя к супремуму по x, получим

$$\sup_x \inf_y f(x,y) \le \inf_y \sup_x f(x,y).$$

Следствие. Если в исходном неравенстве достигаются внешние экстремумы, то

$$\max_x \inf_y f(x,y) \leq \min_y \sup_x f(x,y).$$

Если, кроме того, достигаются внутренние экстремумы, т.е. при любом $x \in X$ существует $\min\limits_y f(x,y)$ и при любом $y \in Y$ существует $\max\limits_x f(x,y)$, то

$$\max_x \min_y f(x,y) \leq \min_y \max_x f(x,y).$$

Theorem

Для того, чтобы функция $f(x, y)$ на произведении $X \times Y$ имела седловые точки, необходимо и достаточно, чтобы существовали минимаксы

$$\max_x \inf_y f(x, y), \qquad \min_y \sup_x f(x, y)$$

и выполнялось равенство

$$\max_x \inf_y f(x, y) = \min_y \sup_x f(x, y)$$

Доказательство

Необходимость. Пусть (x^*, y^*) - седловая точка функции $f(x, y)$. Это означает, что

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \qquad (1)$$

Рассмотрим левую и правую стороны неравенства (1). Переходя в них к супремуму по x и к инфимуму по y соответственно, получим

$$\sup_x f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*),$$

$$f(x^*, y^*) \leq \inf_y f(x^*, y)$$

Тогда

$$\inf_y \sup_x f(x, y) \leq \sup_x f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*),$$

$$f(x^*, y^*) \leq \inf_y f(x^*, y) \leq \sup_x \inf_y f(x, y).$$

Имеем:

$$\inf_y \sup_x f(x,y) \le \sup_x f(x,y^*) \le f(x^*,y^*) \le$$

$$\le \inf_y f(x^*,y) \le \sup_x \inf_y f(x,y), \qquad (2)$$

т.е.

$$\inf_y \sup_x f(x,y) \le \sup_x \inf_y f(x,y).$$

По предыдущей теореме выполняется и противоположное неравенство:

$$\sup_x \inf_y f(x,y) \le \inf_y \sup_x f(x,y).$$

Поэтому

$$\inf_y \sup_x f(x,y) = \sup_x \inf_y f(x,y). \qquad (3)$$

Это означает, что в неравенстве (2) равны все части, т.к. равны внешние части. Именно:

$$\inf_y \sup_x f(x,y) = \sup_x f(x,y^*)$$

Получаем, что в выражении $\inf_y \sup_x f(x,y)$ на $y = y^*$ достигается инфимум. Аналогично

$$\inf_y f(x^*, y) = \sup_x \inf_y f(x,y),$$

т.е. в выражении $\sup_x \inf_y f(x,y)$ на $x = x^*$ достигается супремум. Таким образом, равенство (3) перепишется как

$$\max_x \inf_y f(x,y) = \min_y \sup_x f(x,y). \tag{4}$$

Достаточность. Пусть существуют и равны минимаксы

$$\max_x \inf_y f(x,y) = \min_y \sup_x f(x,y), \tag{5}$$

и внешние экстремумы достигаются на них соответственно в точках x^* и y^*. Это означает, что

$$\max_x \inf_y f(x,y) = \inf_y f(x^*, y).$$

Кроме того, $\inf_y f(x^*, y) \le f(x^*, y^*)$, так что

$$\max_x \inf_y f(x,y) = \inf_y f(x^*, y) \le f(x^*, y^*).$$

Аналогично

$$f(x^*,y^*) \le \sup_x f(x,y^*) = \min_y \sup_x f(x,y).$$

Получим

$$\max_x \inf_y f(x,y) = \inf_y f(x^*,y) \le$$
$$\le f(x^*,y^*) \le \sup_x f(x,y^*) = \min_y \sup_x f(x,y). \qquad (6)$$

Ввиду (5) все части в неравенстве (6) равны между собой. В частности

$$\inf_y f(x^*,y) = f(x^*,y^*) \quad \text{и} \quad \sup_x f(x,y^*) = f(x^*,y^*).$$

Это означает, что

$$f(x^*,y) \ge f(x^*,y^*) \quad \forall x \in X$$
$$f(x,y^*) \le f(x^*,y^*) \quad \forall y \in Y,$$

или

$$f(x,y^*) \le f(x^*,y^*) \le f(x^*,y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Следовательно, (x^*,y^*) - седловая точка функции $f(x,y)$.

Замечание. Из доказательства достаточности теоремы видно, что в качестве компонент седловой точки могут быть взяты любые x, y, на которых достигаются внешние экстремумы в (5). Это означает, что если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - седловые точки функции f, то точки (x_1, y_2) и (x_2, y_1) также будут для неё седловыми. Это свойство седловых точек функции называется прямоугольностью множества седловых точек.
Кроме того, из (6) и (5) следует, что значение функции в седловой точке равно общему значению минимаксов. Это означает, что значения функции f во всех седловых точках совпадают.

Смешанные расширения бескоалиционных игр
Рассмотрим конечную бескоалиционную игру

$$\Gamma =< I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i(x)\}_{i \in I} > .$$

Некоторое вероятностное распределение ξ_i на множестве чистых стратегий X_i назовем смешанной стратегией игрока i,
Вероятность, которую распределение ξ_i приписывает чистой стратегии x_i обозначим через $\xi_i(x_i)$.
Множество всех смешанных стратегий игрока i обозначим через Ξ_i.

Будем считать, что смешанные стратегии всех игроков $i \in I = \{1, \dots, n\}$ являются независимыми в совокупности распределениями, т.е. вероятность появления ситуации $s = (s_1, \dots, s_n)$ равна произведению вероятностей выборов составляющих её стратегий $\xi_1(x_1)\xi_2(x_2)\dots\xi_n(x_n)$.
Тогда ситуацией в смешанных стратегиях называют вероятностное распределение ξ на множетсве всех ситуаций, задаваемое соотношением

$$\xi(x) = \xi(x_1, \dots, x_n) = \xi_1(x_1)\dots\xi_n(x_n).$$

Ситуация игры Г в смешанных стратегиях реализует различные ситуации с некоторыми вероятностями, поэтому значение функции выигрыша каждого из игроков становится случайной величиной.

За выигрыш i-го игрока в ситуации в смешанных стратегиях принимают математическое ожидание этой величины, т.е.

$$f_i(\xi) = \sum_{x \in X} f_i(x)\xi(x) = \sum_{x_1 \in X_1} \dots \sum_{x_n \in X_n} f_i(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} \xi_i(x_i). \quad (7)$$

Отметим также, что

$$f_i(\xi || x_j^0) = \sum_{x_1 \in X_1} \dots \sum_{x_{j-1} \in X_{j-1}} \sum_{x_{j+1} \in X_{j+1}} \dots \sum_{x_n \in X_n} f_i(\xi || x_j^0) \prod_{i=1, i \neq j}^{n} \xi_i(x_i).$$

Игра

$$\Gamma^* =< I, \{\Xi_i\}_{i\in I}, \{f_i(\xi)\}_{i\in I} >,$$

в которой I - множество игроков, Ξ_i- множество смешанных стратегий игрока i, а функция выигрыша определяется равенством (7) называется **смешанным расширением игры** Γ.

Lemma

Какова бы ни была ситуация в смешанных стратегиях $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *любой игрок* i *имеет такую чистую стратегию* x_i^0, *что одновременно выполняются два неравенства*

$$\xi_i(x_i^0) > 0 \text{ и } f_i(\xi||x_i^0) \leq f_i(\xi).$$

Доведення.

Предположим противное, т.е. для всех x_i игрока i, таких что $\xi_i(x_i) > 0$, выполняется $f_i(\xi \| x_i) > f_i(\xi)$.
Тогда для всех таких стратегий

$$f_i(\xi \| x_i)\xi_i(x_i) > f_i(\xi)\xi_i(x_i).$$

Для всех остальных стратегий $\xi_i(x_i) = 0$, следовательно

$$f_i(\xi \| x_i)\xi_i(x_i) = f_i(\xi)\xi_i(x_i) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{x_i \in X_i} f_i(\xi \| x_i)\xi_i(x_i) > \sum_{x_i \in X_i} f_i(\xi)\xi_i(x_i).$$

Но это означает, что $f_i(\xi) > f_i(\xi)$, чего не может быть.
Полученное противоречие указывает на существование искомой чистой стратегии игрока i. $\square$

Ситуация равновесия в смешанных стратегиях в бескоалиционных играх

Ситуацией равновесия игры Γ в смешанных стратегиях называется ситуация равновесия её смешанного расширения Γ^*.
Ситуация ξ^* будет ситуацией равновесия в Γ^*, если для любого игрока i и для любой его смешанной стратегии ξ_i имеет место неравенство

$$f_i(\xi^* || \xi_i) \leq f_i(\xi^*).$$

Theorem

Для того, чтобы ситуация ξ^* в игре Γ была ситуацией равновесия этой игры в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы для любого игрока i и любой его чистой стратегии x_i выполнялось

$$f_i(\xi^*||x_i) \leq f_i(\xi^*). \tag{8}$$

Доказательство.
Необходимость Т.к. чистая стратегия является частным случаем смешанной, то неравенство (8) напрямую следует из определения равновесной ситуации.
Достаточность Возьмем произвольную смешанную стратегию ξ_i игрока i, домножим неравенство (8) на $\xi_i(x_i)$ и просуммируем по всем $x_i \in X_i$

$$f_i(\xi^*||x_i) = \sum_{x_i \in X_i} f_i(\xi^*||x_i)\xi_i(x_i) \leq \sum_{x_i \in X_i} \xi_i(x_i) f_i(\xi^*) =$$

$$= f_i(\xi^*) \sum_{x_i \in X_i} \xi_i(x_i) = f_i(\xi^*).$$

Из полученного неравенства следует равновесность ситуации ξ^*.

Теорема Нэша.

Theorem (Нэша)

В каждой бескоалиционной игре

$$\Gamma = < I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i(x)\}_{i \in I} >$$

существует хотя бы одна ситуация равновесия.

Доказательство Если игрок i имеет в Γ m_i чистых стратегий, то множество его смешанных стратегий Ξ_i представляет собой $(m_i - 1)$мерный симплекс. Обозначим его через $S^{(i)}$. Тогда всякую ситуацию в смешанных стратегиях $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ можно рассматривать как точку декартова произведения $S^{(1)} \times \ldots \times S^{(n)}$, которое является выпуклым замкнутым ограниченным подмножеством $(m_1 + \ldots + m_n - n)$мерного пространства. Введем функцию $\varphi_{ij}(\xi) = \max\{0, f_i(\xi || x_i^{(j)}) - f_i(\xi)\}$ для всякой ситуации ξ и любой чистой стратегии $x_i^{(j)} \in X_i$ игрока i. Она показывает увеличение выигрыша игрока i в ситуации ξ, происходящее за счет изменения его стратегии ξ_i, входящей в эту ситуацию, на некоторую чистую стратегию $x_i^{(j)}$.

Составим теперь для всех $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m_i}$ числа вида

$$\frac{\xi_i(x_i^{(j)}) + \varphi_{ij}(\xi)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\xi)}. \tag{9}$$

Т.к. все $\varphi_{ij}(\xi) \geq 0$, то все эти числа также неотрицательны, а каждая сумма вида

$$\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\xi_i(x_i^{(j)}) + \varphi_{ij}(\xi)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\xi)} = 1.$$

Следовательно, при фиксированных ξ и i дроби (9) можно понимать как вероятности соответствующих чистых стратегий $x_i^{(j)}$ игрока i, а каждый их набор для всех чистых стратегий $x_i^{(j)}$ - как смешанную стратегию игрока i. Совокупность дробей (9) для всех игроков определяет систему смешанных стратегий всех игроков, т.е. ситуацию в игре Г.

Эта ситуация является функцией исходной ситуации ξ, обозначим ее через $g(\xi)$. Функция g осуществляет преобразование выпуклого компактного множества всех ситуаций Ξ в себя. Кроме того, она является непрерывной функцией ξ, т.к. $\varphi_{ij}(\xi)$ непрерывна, а знаменатель $1 + \sum\limits_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\xi) \geq 1$. Это означает, что g удовлетворяет всем условиям теоремы о неподвижной точке [1], согласно которой непрерывное преобразование g выпуклого подмножества конечномерного пространства в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку, т.е такую точку ξ^0, что $g(\xi^0) = \xi^0$. Пусть ξ^0 - неподвижная точка функции g. Это значит, что для всех i и j

$$\xi_i^0(x_i^{(j)}) = \frac{\xi_i^0(x_i^{(j)}) + \varphi_{ij}(\xi^0)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\xi^0)}. \tag{10}$$

[1] См., например: Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., 1965, с. 502-507.

Ранее было показано, что для любого игрока i существует такая чистая стратегия x_i^0 этого игрока, что $\xi_i^0(x_i^0) > 0$ и $\varphi_{i0}(\xi^0) = 0$. Для этой стратегии равенство (10) записывается как

$$\xi_i^0(x_i^0) = \frac{\xi_i^0(x_i^0) + \varphi_{i0}(\xi^0)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\xi^0)},$$

откуда

$$\xi_i^0(x_i^0) + \xi_i^0(x_i^0) \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\xi^0) = \xi_i^0(x_i^0) + \varphi_{i0}(\xi^0),$$

$$\xi_i^0(x_i^0) \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\xi^0) = \varphi_{i0}(\xi^0) = 0.$$

Т.к. $\xi_i^0(x_i^0) > 0$, то $\sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\xi^0) = 0$.
А т.к. все $\varphi_{ij}(\xi^0) \geq 0$, то они $\varphi_{ij}(\xi^0) = 0$.

Это означает, что любая разность

$$f_i(\xi || x_i^{(j)}) - f_i(\xi) \leq 0,$$

т.е.

$$f_i(\xi || x_i^{(j)}) \leq f_i(\xi).$$

По предыдущей теореме получаем, что ξ^0 - ситуация равновесия.

Замечание. Стоит отметить, что теорема Нэша только гарантирует существование ситуаций равновесия, но не дает алгоритмов их нахождения. Это связано с использованием теоремы о неподвижной точке, которая также не является конструктивной.