Принятие решений в условиях неопределённости.

Теория игр — это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта или неопределенности. При этом конфликт не обязательно должен быть антагонистическим, в качестве конфликта можно рассматривать любое разногласие.

Рассмотрим пример. Пусть требуется принять решение о выпуске на рынок некоторого товара. Может случиться, что объем спроса на этот товар известен точно; может быть, что известно лишь статистическое распределение возможных значений спроса; наконец, может оказаться, что известны лишь границы, в которых заключен спрос, но никаких даже вероятностных соображений о его предстоящих значениях нет. Последний случай квалифицируется как неопределенность. Такая неопределенность может возникнуть, когда спрос (например, на сезонные товары) зависит от метеорологических условий (конфликт с природой) или, в условиях рынка, от деятельности конкурента, уже удовлетворившего неизвестную часть спроса. Приведенные примеры при определенных условиях могут быть приведены к игре.

Всякая теоретико-игровая модель должна отражать, кто и как конфликтует, а также, кто и в какой форме заинтересован в том или ином исходе конфликта. Действующие в конфликте стороны будем называть **игроками**, а решения, которые способны принимать игроки, — **стратегиями**. Игры с природой применяются для анализа экономических ситуаций, оценки эффективности принимаемых решений и выбора наиболее предпочтительных альтернатив, в которых риск связан с совокупностью неопределенных факторов окружающей среды, именуемых «природа». Поэтому термин «природа» характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встречаться ситуации, в которых игроком действительно может выступать природа (например, погодные условия или стихийные бедствия).

В играх с природой создание модели должно начинаться с построения **платежной матрицы**. Это наиболее трудоемкий и ответственный этап подготовки принятия решения, так как ошибки в платежной матрице не могут быть компенсированы никакими вычислительными методами и могут привести к неверному итоговому результату. Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком 1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы» партнер по игре.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы, т.е. имеет ли место ситуация риска или неопределенности. Предположим, что построена следующая платежная матрица игры с природой:

$$E = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_1 \\ \dots \\ P_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Здесь игрок I имеет m возможных ситуаций $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_m$, а у природы имеется n возможных состояний (стратегий) $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. Платит, естественно, не природа, а некая третья сторона.

Можно задавать матрицу игры с природой и в виде так называемой матрицы рисков

$R = (r_{ij})$ или матрицы упущенных возможностей. Величина риска — это размер платы за отсутствие информации о состоянии среды. Матрицу R строим на основе матрицы выигрышей $E = (e_{ij})$.

Риском r_{ij} игрока при использовании им стратегии P_i, и при состоянии среды Π_j будем называть разность между выигрышем, который игрок получил бы, если бы он знал, что состоянием среды будет Π_j , и выигрышем, который игрок получит, не имея этой информации.

Зная состояние природы (стратегию) Π_j, игрок выбирает ту стратегию, при которой его выигрыш максимальный, т.е.

$$r_{ij} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} e_{ij} - e_{ij} \ .$$

Независимо от вида матрицы игры требуется выбрать такую стратегию игрока, которая была бы наиболее выгодной по сравнению с другими.

Классические критерии принятия решений.

Минимаксный критерий

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом:

> Матрица решений дополняется ещё одним столбцом из наименьших результатов e_{ir} каждой строки. Необходимо выбрать те варианты, в строках которых стоят наибольшее значение e_{ir} этого столбца.

Выбранные т.о. варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Это свойство позволяет считать ММ-критерий одним из фундаментальных. Поэтому в технических задачах он применяется чаще всего, как сознательно, так и несознательно. Продемонстрируем это на небольшом примере.

	Π_1	$\dots$	Π_i	$\dots$	Π_{100}	$e_i = \max\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_i$
P_1	1	$\dots$	j	$\dots$	100	1	
P_2	1.1	$\dots$	1.1	$\dots$	1.1	1.1	1.1

Хотя вариант P_1 кажется более выгодным, согласно ММ-критерию оптимальным следует считать P_2. Принятие решения по этому критерию может, однако, оказаться еще менее разумным, если

– состояния Π_i встречаются чаще, чем состояние Π_1 ,

– решение реализуется многократно.

Этот пример показывает, что в многочисленных практических ситуациях пессимизм минимаксного критерия может оказаться очень невыгодным.

Применение ММ-критерия бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, следующая:

1. О возможности появления внешних состояний Π_j ничего не известно.

2. Приходится считаться с появлением различных внешних состояний Π_j.

3. Решение реализуется только один раз.

4. Необходимо исключить какой бы то ни было риск.

Критерий Байеса – Лапласа.

Обозначим через q_i – вероятность появления внешнего состояния Π_i. Соответствующее правило выбора можно интерпретировать следующим образом:

Матрица решений дополняется ещё одним столбцом содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются те варианты, в строках которых стоит наибольшее значение e_{ir} этого столбца.

При этом предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

1. Вероятности появления состояния Π_i известны и не зависят от времени.

2. Решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз.

3. Для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключён.

Таким образом, критерий Байеса—Лапласа (BL-критерий) более оптимистичен, чем минимаксный критерий, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

Критерий Сэвиджа.

Введем вспомогательную матрицу с элементами a_{ij} :

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij} \ .$$

Величину a_{ij} можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии Π_j вместо варианта P_i выбирать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Величину a_{ij} можно интерпретировать и как потери (штрафы) возникающие в состоянии Π_j при замене оптимального для него варианта на вариант P_i. Тогда величина

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right)$$

представляет собой максимально возможные (по всем внешним состояниям $\Pi_j,\ j = \overline{1, n}$) потери в случае выбора варианта P_i. Соответствующее критерию Сэвиджа правило выбора теперь трактуется так:

1. Каждый элемент матрицы решений вычитается из наибольшего результата $\max_i e_{ij}$ соответствующего столбца.

2. Разности a_{ij} образуют матрицу остатков. Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей e_{ir}. Выбирают те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к ММ-критерию.

Пример и выводы.

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям, становится ясно, что вследствие их жёстких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочерёдно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов ЛПР (лицо, принимающее решение) волевым методом выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Пример. При работе ЭВМ необходимо периодически приостанавливать обработку информации и проверять ЭВМ на наличие в ней вирусов. Приостановка в обработке информации приводит к определённым экономическим издержкам. В случае же если вирус вовремя обнаружен не будет, возможна потеря и некоторой части информации, что приведёт и ещё к большим убыткам.

Варианты решения таковы:

P_1 — полная проверка;

P_2 — минимальная проверка;

P_3 — отказ от проверки.

ЭВМ может находиться в следующих состояниях:

Π_1 — вирус отсутствует;

Π_2 — вирус есть, но он не успел повредить информацию;

Π_3 — есть файлы, нуждающиеся в восстановлении.

Результаты, включающие затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации имеют вид:

$$E = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_1 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -20 & -22 & -25 \\ -14 & -23 & -31 \\ 0 & -24 & -40 \end{pmatrix} \end{array}$$

Согласно ММ-критерию следует проводить полную проверку. Действительно, расчеты в таблице могут быть записаны следующим образом:

	Π_1	Π_2	Π_3	$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
P_1	-20	-22	-25	-25	$\boxed{-25}$
P_2	-14	-23	-31	-31	
P_3	0	-24	-40	-40	

Критерий Байеса—Лапласа, в предположении, что все состояния машины равновероятны, то есть $q_i = \dfrac{1}{3}$, рекомендует отказаться от проверки:

	Π_1	Π_2	Π_3	$e_{ir} = \sum\limits_j e_{ij} q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
P_1	-20	-22	-25	-22.33	
P_2	-14	-23	-31	-22.67	
P_3	0	-24	-40	-21.33	$\boxed{-21.33}$

Матрица остатков для этого примера и их оценка (в тысячах) согласно критерию Сэвиджа имеет вид:

	Π_1	Π_2	Π_3	$e_{ir} = \min\limits_j a_{ij}$	$\min\limits_i e_{ir}$
P_1	$+20$	0	0	$+20$	
P_2	$+14$	$+1$	$+6$	$+14$	$\boxed{+14}$
P_3	0	$+2$	$+15$	$+15$	

Пример специально подобран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределённость состояния, в котором проверка застаёт ЭВМ, превращается в неясность, какому критерию следовать.

Поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение, лучшее всего для сравнительной оценки рекомендации тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса—Лапласа. Если же число машин не велико, лучше пользоваться критериями минимакса или Севиджа.

Производные критерии.

Критерий Гурвица.

Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, Гурвиц предположил оценочную функцию, которая находится где-то между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left\{ C \min_j e_{ij} + (1 - C) \max_i e_{ij} \right\}$$

где C — весовой множитель.

Правило выбора согласно критерию Гурвица, формируется следующим образом:

> Матрица решений дополняется столбцом, содержащим среднее взвешенное наименьшего и наибольшего результатов для каждой строки. Выбираются только те варианты, в строках которых стоят наибольшие элементы e_{ir} этого столбца.

При $C = 1$ критерий Гурвица превращается в ММ-критерий. При $C = 0$ он превращается в критерий “азартного игрока”, то есть делает ставку на то, что «выпадет» наивыгоднейший случай. В технических приложениях сложно выбрать весовой множитель C, т.к. трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще всего полагают $C = \dfrac{1}{2}$.

Критерий Гурвица применяется в случае, когда :

1. О вероятностях появления состояния Π_j ничего не известно.
2. С появлением состояния Π_j необходимо считаться.
3. Реализуется только малое количество решений.
4. Допускается некоторый риск.

Критерий Ходжа–Лемана.

Этот критерий опирается одновременно на ММ-критерий и критерий Байеса—Лапласа. С помощью параметра ν выражается степень доверия к используемому распределений вероятностей. Если доверие велико, то доминирует критерий Байеса—Лапласа, в противном случае – ММ-критерий, т.е. мы ищем

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left\{ \nu \sum_j e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right\} \ , \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 1 \ .$$

Правило выбора, соответствующее критерию Ходжа—Лемана формируется следующим образом:

> Матрица решений дополняется столбцом, составленным из среднего взвешенного (с весом $\nu = const$) математического ожидания и наименьшего результата каждой строки. Отбираются те варианты решений в строках которого стоит наибольшее значение этого столбца.

При $\nu = 1$ критерий Ходжа—Лемана переходит в критерий Байеса—Лапласа, а при $\nu = 0$ становится минимаксным. Выбор ν субъективен так как степень достоверности какой-либо функции распределения — дело тёмное.

Для применения критерия Ходжа—Лемана желательно, чтобы ситуация, в которой принимается решение, удовлетворяла следующим свойствам:

1. Вероятности появления состояния Π_j неизвестны, но некоторые предположения о распределении вероятностей имеются.
2. Принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций.
3. При малых числах реализации допускается некоторый риск.

Критерий Гермейера.

Этот критерий ориентирован на величину потерь, т.е. на отрицательные значения всех e_{ij}. При этом

$$\max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \ .$$

Так как в хозяйственных задачах преимущественно имеют дело с ценами и затратами, условие $e_{ij} < 0$ обычно выполняется. В случае же, когда среди величин e_{ij} встречаются и положительные значения, можно перейти к строго отрицательным значениям с помощью преобразования $e_{ij} - a$ при подходящим образом подобранном $a > 0$. При этом оптимальный вариант решения зависит от a.

Правило выбора согласно критерию Гермейера формулируется следующим образом :

Матрица решений дополняется ещё одним столбцом, содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния Π_j. Выбираются те варианты, в строках которых находится наибольшее значение этого столбца.

В каком-то смысле критерий Гермейера обобщает ММ-критерий: в случае равномерного распределения $\left(q_j = \dfrac{1}{n},\ j = \overline{1,n}\right)$ они становятся идентичными.

Условия его применимости таковы :

1. Вероятности появления состояния Π_j неизвестны.
2. С появлением тех или иных состояний, отдельно или в комплексе, необходимо считаться.
3. Допускается некоторый риск.
4. Решение может реализоваться один или несколько раз.

Если функция распределения известна не очень надёжно, а числа реализации малы, то, следуя критерию Гермейера, получают, вообще говоря, неоправданно большой риск.

BL (MM)—критерий.

Стремление получить критерии, которые бы лучше приспосабливались к имеющейся ситуации, чем все до сих пор рассмотренные, привело к построению так называемых составных критериев. В качестве примера рассмотрим критерий, полученный путем объединения критериев Байеса—Лапласа и минимакса.

Правило выбора для этого критерия формулируется следующим образом:

<table><tr><td>Матрица решений дополняется еще тремя столбцами. В первом из них записываются математические ожидания каждой из строк, во втором — разность между опорным значением

$$e_{i_0 j_0} = \max_i \min_j e_{ij}$$

и наименьшим значением $\min\limits_j e_{ij}$ соответствующей строки.</td></tr></table>

В третьем столбце помещаются разности между наибольшим значением $\max\limits_j e_{ij}$ каждой строки и наибольшим значением той строки, в которой находится значение $e_{i_0 j_0}$. Выбираются те варианты, строки которых (при соблюдении приводимых ниже соотношений между элементами второго и третьего столбцов) дают наибольшее математическое ожидание. А именно, соответствующее значение

$$e_{i_0 j_0} - \max_j e_{ij}$$

из второго столбца должно быть меньше или равно некоторому заранее заданному допустимому уровню риска $\varepsilon_{\text{доп}}$. Значение же из третьего столбца должно быть больше или равны значениям из второго столбца.

Применение этого критерия обусловлено следующими признаками ситуации, в которой принимается решение:

1. Вероятности появления состояний Π_j неизвестны, однако имеется некоторая априорная информация в пользу какого-либо определенного распределения.

2. Необходимо считаться с появлением различных состояний как по отдельности, так и в комплексе.

3. Допускается ограниченный риск.

4. Принятое решение реализуется один раз или многократно.

BL(MM)-критерий хорошо приспособлен для построения практических решений прежде всего в области техники и может считаться достаточно надежным. Однако заданные границы риска $\varepsilon_{\text{доп}}$ и, соответственно, оценок риска ε_i не учитывает ни число применения решения, ни иную подобную информацию. Влияние субъективного фактора хотя и ослаблено, но не исключено полностью.

Условие

$$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \geqslant \varepsilon_i$$

существенно в тех случаях, когда решение реализуется только один или малое число раз. В этих условиях недостаточно ориентироваться на риск, связанный только с невыгодными внешними состояниями и средними значениями. Из-за этого, правда, можно понести некоторые потери в удачных внешних состояниях. При большом числе реализаций это условие перестает быть таким уж важным. Оно даже допускает разумные альтернативы. При этом не известно, однако, четких количественных указаний, в каких случаях это условие следовало бы опускать.

Критерий произведений.

Критерий основан на максимизации величины

$$\max_i e_{ir} = \max_i \prod_j e_{ij} \ .$$

Правило выбора в этом случае формулируется так :

Матрица решений дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбираются те варианты, в строках которых находятся наибольшие значения этого столбца.

Применение этого критерия обусловлено следующими обстоятельствами :

1. Вероятности появления состояния Π_j неизвестны.
2. С появлением каждого из состояний Π_j по отдельности необходимо считаться.
3. Критерий применим и при малом числе реализаций решения.
4. Некоторый риск допускается.

Критерий произведений приспособлен в первую очередь для случаев, когда все e_{ij} положительны. Если условие положительности нарушается, то следует выполнять некоторый сдвиг $e_{ij} + a$ с некоторой константой $a > \min\limits_{i,j} e_{ij}$. Результат при этом будет, естественно, зависеть от a. На практике чаще всего полагают $a = \left|\min\limits_{i,j} e_{ij} + 1\right|$. Если же никакая константа не может быть признана имеющей смысл, то критерий произведений не применим.

Пример. Продолжим рассмотрение предыдущего примера.

Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках ЭВМ по критерию Гурвица при $C = 0.5$ имеет вид :

	Π_1	Π_2	Π_3	$C \min\limits_j e_{ij}$	$(1-C)\max\limits_j e_{ij}$	e_{ir}	$\max\limits_i e_{ir}$
P_1	-20	-22	-25	-12.5	-10	-22.5	
P_2	-14	-23	-31	-15.5	-7	-22.5	
P_3	0	-24	-40	-20	0	-20	$\boxed{-20}$

В данном примере у решения имеется поворотная точка относительно весового множителя C : до $C = 0.57$ в качестве оптимального выбирается P_3, а при больших значениях — P_1.

Применим критерий Ходжа—Лемана при условии, что $q = \dfrac{1}{3}$, $\nu = 0.5$:

	Π_1	Π_2	Π_3	$\sum\limits_j e_{ij}q_j$	$\min\limits_j e_{ij}$	$\nu\sum\limits_j e_{ij}q_j$	$(1-\nu)\min\limits_j e_{ij}$	e_{ir}	$\max\limits_i e_{ir}$
P_1	-20	-22	-25	-22.33	-25	-11.17	-12.5	-23.67	$\boxed{-23.67}$
P_2	-14	-23	-31	-22.67	-31	-11.34	-15.5	-26.84	
P_3	0	-24	-40	-21.33	-40	-10.67	-20	-30.76	

Критерий Ходжа—Лемана рекомендует вариант P_1 (полная проверка) — так же как и ММ-критерий. Смена рекомендуемого варианта происходит только при $\nu = 0.94$. Поэтому равномерное распределение состояний рассматриваемой машины должно распознаваться с очень высокой вероятностью, чтобы его можно было выбрать по большему математическому ожиданию. При этом число реализаций решения всегда остаётся произвольным.

Критерий Гермейера при $q = \dfrac{1}{3}$ даёт следующий результат

	Π_1	Π_2	Π_3	$e_{ij}q_j$			$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij}q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
P_1	-20	-22	-25	-6.67	-7.33	-8.33	-8.33	$\boxed{-8.33}$
P_2	-14	-23	-31	-4.67	-7.67	-10.33	-10.33	
P_3	0	-24	-40	0	-8	-13.33	-13.33	

В качестве оптимального выбирается вариант P_1. Сравнение вариантов с помощью величин e_{ir} показывает, что способ действия критерия Гермейера является даже более гибким, чем у ММ-критерия.

В таблице, приведенной ниже, решение выбирается в соответствии с BL(MM)—критерием при $q_j = \frac{1}{3}$. Находим $e_{i_0j_0} = \max_i \min_j e_{ij} = -25,\ i_0 = 1,\ j_0 = 3$.

				Столбец 1		Столбец 2		Столбец 3
	Π_1	Π_2	Π_3	$\sum_j e_{ij}q_j$	$\min_j e_{ij}$	$e_{i_0j_0} - \min_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0j}$
P_1	-20	-22	-25	-22.33	-25	0	-20	0
P_2	-14	-23	-31	-22.67	-31	+6	-14	+6
P_3	0	-24	-40	-21.33	-40	+15	0	+20

Вариант P_3 (отказ от проверки) принимается этим критерием только тогда, когда риск приближается к $\varepsilon_3 = 15$, так как значение в столбце 3 больше значения в столбце 2 третьей строки. В противном случае оптимальным оказывается P_1 (т.к. из допустимых стратегий она дает наименьшее математическое ожидание затрат). Во многих технических и хозяйственных задачах допустимый риск бывает намного ниже, составляя обычно только незначительный процент от общих затрат. В подобных случаях бывает особенно ценно, если неточное знание распределения вероятностей сказывается не очень сильно. Если при этом оказывается невозможным установить допустимый риск $\varepsilon_{\text{доп}}$ заранее, независимо от принимаемого решения, то помочь может вычисление ожидаемого риска ε_i. Тогда становится возможным подумать, оправдан ли подобный риск. Такое исследование обычно дается легче.

Результаты применения критерия произведения при $a = 41$ и $a = 200$ имеют вид :

$e_{ij} + a$			$e_{ir} = \prod_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
$a = 41$				
21	19	16	6384	$\boxed{6384}$
27	18	10	4860	
41	17	1	697	
$a = 200$				
180	178	175	5607	
186	177	169	5563	
200	176	160	5632	$\boxed{5632}$

Условие $e_{ij} > 0$ для данной матрицы не выполняется. Поэтому к элементам матрицы добавляется сначала $a = 41$, а затем $a = 200$ (эти значения выбраны произвольным образом). Для первого случая оптимальным оказывается вариант решения P_1 , а для — вариант P_3, так что зависимость оптимального варианта от a очевидна.

Задания для самостоятельного решения.

В условии заданий m — номер варианта, а $n = 11 - m$.

1. Найти оптимальное решение, используя все известные критерии, для матрицы

$$E = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_1 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 9 & m+1 & m+2 \\ 8+n & 9 & 11 & 3+n \\ 12 & 4 & m+n+2 & 1 \\ m+3 & 2+n & 9 & 12 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Вероятности q_j осуществления ситуации Π_j равны

$$q_1 = 0.3\ , \quad q_2 = 0.2\ , \quad q_3 = 0.4\ , \quad q_4 = 0.1\ .$$

2. Найти оптимальное решение, используя все известные критерии, для матрицы

$$E = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_1 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 & \Pi_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 7 & m+1 \\ 2 & 4 & 3 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & 1+n & 8-n & 3 \\ 4 & 1+m & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Вероятности q_j осуществления ситуации Π_j равны

$$q_1 = 0.2\ , \quad q_2 = 0.1\ , \quad q_3 = 0.5\ , \quad q_4 = 0.05\ , \quad q_5 = 0.15\ .$$