Теория принятия решений

Раздел : Теория голосования

О.Д. Кичмаренко

А.П. Огуленко

ОНУ имени И.И.Мечникова

2012

Оглавление

Введение

Принятие решений условиях конфликта является одной из ключевых проблем в современном обществе, тем более, если речь идет о выборе лучшей альтернативы путем голосования. Справедлив ли был выбор? Отражено ли мнение большинства?..

Без применения методов прикладной математики решение этой проблемы невозможно.

Предлагаемый курс лекций содержит в себе постановку задачи теории голосования, анализ основных процедур голосования и их модификаций в историческом разрезе. Рассматриваются причины возникновения парадоксов голосования и изложен строгий аксиоматический подход к синтезу процедур голосования.

Для закрепления изученного материала читателю предлагается самостоятельно выполнить несколько заданий.

Теория социального выбора

> Я всегда могу выбирать, но я должен знать, что даже в том случае, когда я ничего не выбираю, я тем самым все-таки выбираю.
>
> Жан-Поль Сартр

1. Социальный выбор в жизни общества

Процессы принятия решений лежат в основе любой целенаправленной деятельности. В экономике они предшествуют созданию производственных и хозяйственных организаций, обеспечивают их оптимальное функционирование и взаимодействие; при создании новой техники — осуществляют важный этап в проектировании машин, устройств, приборов, в разработке технологий их построения и эксплуатации; в социальной сфере — используются для организации функционирования и развития социальных процессов, их координации с хозяйственными и экономическими.

Следовательно, теория выбора и принятия решений существует столько же, сколько существует разумный человек. Исследовать принятие решений можно по-разному: просто обсуждать, как решать возникающие проблемы; сопровождать подобное обсуждение расчетами, опираясь при этом на математические модели.

Элементы теории выбора и принятия решений в той или иной форме включаются в учебные планы по широкому кругу специальностей: прикладной математике, технической кибернетике, автоматизации проектирования, экономической кибернетике и другим. Основной особенностью методологии принятия решений является то, что поиск оптимального (по тому или иному критерию) управляющего решения всегда предполагает построение математической модели и использование для её анализа математического аппарата. Это означает, что хотя бы некоторые данные, участвующие в постановке задачи, должны иметь количественное выражение.

Методы поиска оптимальных решений рассматриваются в разделах классической математики, связанных с изучением экстремумов функций, в математическом программировании. Основное свойство оптимального решения в этом случае состоит в том, что оно доставляет экстремум заданной функции. Действительно, часто оценка решения производится по одному критерию. Однако, на практике обычно решение нужно оценивать с различных точек зрения, учитывая физические, экономические, технические и другие критерии. Это требует построения моделей оптимизации решений одновременно по нескольким критериям. Здесь при постановке задачи требуется ввести понятие оптимального решения, которое может пониматься по-разному. Соображения качественного характера учитываются дополнительно и являются некоторым фоном для используемой математической модели. Безусловно, при решении прикладных задач возможны ситуации, когда роль этого фона оказывается решающей. Сложность возникающих в практической деятельности задач состоит также в том, что различные подразделения одной и той же организации могут (возможно, не всегда полностью осознанно) преследовать различные цели, а внешние экономические факторы, от которых зависит деятельность организации, могут содержать элементы неопределенности. Необходимо считаться с различием личных, коллективных и общественных интересов.

Это значит, что социально-экономическое явление при его математическом моделировании должно допускать представление в виде конфликта, то есть такое, в котором отражены следующие его компоненты:

1) заинтересованные стороны;

2) интересы сторон;

3) возможные действия каждой из сторон.

В условиях конфликта принимающему решения субъекту приходится считаться не только со своими собственными целями, но также с теми целями, которые ставят перед собой его партнёры. Помимо этого, он должен учитывать, кроме объективных, известных ему обстоятельств конфликта, ещё и те решения, которые принимают его противники и которые ему самому, вообще говоря, неизвестны. Конфликт интересов порождает столкновение людей. Перед любым человеческим сообществом стоят две основные задачи: созидание и распределение. Система распределения затрат и благ должна разрешить так или иначе основную конфликтную ситуацию, связанную со стремлением сделать вклад поменьше, а получить побольше. Собственно человеческим способом взаимодействия людей являются соглашения и компромиссы. Система распределения благ и затрат опирается на представления о справедливости. Если большинство членов общества не признают справедливости существующих принципов распределения, то либо оно развалится, либо будет тратить всё большие ресурсы на систему подавления и наказания.

Что такое справедливость? Человечество думало об этом всегда и выработало достаточно много принципов справедливости. Всякое общество пытается обосновать справедливость своей системы распределения, заявляет о своем стремлении к совершенствованию этой системы. Большинство общественных решений (таких как налоги и общественные расходы) принимаются на основе голосования. Голосование также используются для пополнения многих общественных учреждений (выборы парламента, президента, мэра и проч.). Путём голосования членами жюри (или комиссии) происходит определение победителей представленных на конкурс технических проектов, произведений искусства; обсуждение и согласование нескольких альтернативных законопроектов законодательным собранием; отбор образцов новых промышленных изделий по перспективности их внедрения. Все мы участвуем в принятии тех или иных решений путем голосования на собраниях, заседаниях различных комитетов, выборах представителей законодательной и исполнительной власти.

2. Формирование коллективного решения

По вопросу принятия решений общество в принципе отличается от личности.

Пример. В условиях демократии и свободы волеизъявления трое голосующих Виктор, Юлия и Александр должны определить, что важнее для страны – оборона, образование или социальное обеспечение (в какую отрасль вложить дополнительные инвестиции).

Мнение Виктора: наиболее важным является образование, т.к. современный человек должен быть образован, знать историю, например. Затем в рейтинге Виктора – социальное обеспечение, и только потом – оборона.

Мнение Юлии: наиболее важной является оборона, т.к. именно эта отрасль определяет, по ее мнению, силу государства, затем – образование, и только после этого – социальное обеспечение.

Мнение Александра: прежде всего нужно заботиться о людях – поэтому на первом месте социальное обеспечение, затем – сила государства – оборона, а образование – на третьем месте.

Это можно представить в виде таблицы:

Виктор	**Юлия**	**Александр**
образование	оборона	социальное обеспечение
социальное обеспечение	образование	оборона
оборона	социальное обеспечение	образование

Так как мнение голосовавших равноправны, то принять решение на основе этого мнения избирателей невозможно. Чтобы как-то решить вопрос, правительство может разделить выделяемые деньги на 3 равные части. Но это уже будет вопреки воли голосовавших – т.е. нарушение демократии. Какое же это народовластие? (В качестве лиц, принимающих решение, могут, например, выступать президент, парламент и кабинет министров и тогда невозможно получить согласие на уровне государства).

□

В основе способа выбора нужной персоналии на высший пост лежит процедура голосования. Считается, что коллективное мнение всегда лучше индивидуального. Но все на так просто, как кажется. Приведенный выше пример этому подтверждение. Можно ли создать такую систему голосования, чтобы она была рациональной, решающей и демократичной одновременно? Способ голосования может быть избавлен от произвольности, безвыходных положений или неравноправия, но он не может избежать всех этих недостатков одновременно. Парадокс заключается в том, что не существует универсального способа выявления коллективного предпочтения. Существует бесконечное множество достаточно разумных способов его выявления. Как правило, они приводят к совершенно различным , а иногда и к прямо противоположным результатам. При этом вовсе не имеется ввиду грубое нарушение закона или умение экспертов PR аргументировано убеждать людей в вещах противоположных. Методика манипулирования демократией предусматривает (в том числе) всего лишь таким образом построить регламент проведения голосования, чтобы получить необходимый конечный результат. То есть, вначале нужно принять нужное правило голосования, а дальше – дело математики.

Пример. Выборы в Совет трудового коллектива. 300 человек избирателей должны выбрать 30 человек в совет трудового коллектива. На эти 30 мест претендуют 180 кандидатов. Администрация предприятия определила правило: избранным в Совет будет тот, кто набрал более половины от общего числа голосов. Избиратели в бюллетене отмечают лучших (не обязательно одного). После проведения первого тура только 2 человека набрало более половины голосов избирателей. После проведения второго тура было избрано еще 3 кандидата.

Администрация пришла к выводу, что таким образом дальше голосовать нельзя, так как этот процесс затянется надолго. Ограничений на процедуру проведения выборов не было. Поэтому решили провести выборы «наоборот»: в бюллетене вычеркивать тех, кто по мнению избирателя не достоин быть в Совете, а голоса «за» считать количество бюллетеней, где кандидат не вычеркнут. Третий тур провели именно таким образом. И оказалось, что необходимое количество — 25 кандидатов — набрано! Выборы закончились. Откуда чудо?

Оказывается, при таком большом количестве кандидатов у избирателей есть не 2 альтернативы («достоин», «не достоин»), а 3: «достоин», «не достоин» и «не знаю». И при правиле проведения третьего тура произошло объединение голосов «достоин» и голосов «не знаю». Т.е. манипуляция с голосами воздержавшихся. Предположим теперь, что среди этих кандидатов есть новый сотрудник, которого никто не знает, он только пришел на предприятие и самовыдвинулся. Этот кандидат в третьем туре будет избран единогласно! Т.е. он избран только за счет голосов «не знаю».

□

Коллективный выбор часто спотыкается о порог невозможности выяснения приемлемого решения. Это происходит при определенных соотношениях числа вариантов и величин групп избирателей. Известен исторический пример, выборов Папы Римского. Для того, чтобы занять этот пост всегда было немало желающих, но при отсутствии строгого большинства и при отсутствии устойчивых коалиций ни один из кандидатов не мог набрать необходимые $2/3$ голосов. Тогда к всесильным кардиналам применили принудительный прием: вход в помещение, где проходят выборы, замуровывался до тех пор, пока они не выберут главу церкви. И только после появления над ватиканской крышей дымка, свидетельствующего об избрании Папы, кардиналов выпускали на волю. Таким образом преодолевается порог «парадокса голосования». Но за примерами не обязательно обращаться в средние века.

3. Основные процедуры голосования

Мы рассмотрим вопросы принятия решений с помощью распространённых на практике процедур голосования, а также некоторые возникающие при этом проблемы. Голосование содержит следующие элементы:

1) формируется набор кандидатов (кандидатов на выборную должность, технических проектов, произведений искусства, альтернативных законопроектов и т.п.) в отношении которых должно быть принято решение;

2) каждый из участников голосования (избирателей) вырабатывает свое мнение об этих кандидатах и отражает его в избирательном бюллетене в соответствии с инструкцией;

3) в соответствии с некоторой формальной процедурой по этой информации, поступившей от избирателей, определяется коллективное решение.

Различные процедуры голосования различаются тем, какой смысл вкладывается в каждый из этих трех пунктов. При становлении демократии элементы грамотности в теории голосовании, по-видимому, нужны всем сознательным членам общества. Будем предполагать, что конечное число избирателей должны избрать одного кандидата из конечного множества кандидатов. Предположим также, что индивидуальные мнения избирателей не допускают случаев безразличия.

Правило голосования представляет собой систематическое решение, опирающееся на индивидуальные мнения избирателей. Выбор кандидата происходит на основе сообщенных избирателями предпочтений относительно кандидатов и только на основе этих предпочтений. Предпочтения избирателей будем представлять в виде таблицы следующего вида:

Избирательные группы	I	II	...
Количество избирателей в группе	N_1	N_2	...
Порядок предпочтения кандидатов избирателями	a b c ...	d c a ...	... ...

Порядок кандидатов в столбце определенной группы соответствует рейтингу в соответствующей группе избирателей. Например, в первой избирательной группе кандидат a предпочтительнее кандидата b, а кандидат b, в свою очередь, предпочтительнее кандидата c. Это можно записать как $a \succ b \succ c \succ \ldots$. Во второй избирательной группе порядок можно записать так: $d \succ c \succ a \succ \ldots$.Такую таблицу также называют «профилем голосования».

Если кандидатов двое, то обычное правило голосования большинством голосов является наиболее справедливым. Рассмотрим голосование с тремя и более кандидатами. Какое правило голосования является естественным продолжением голосования по принципу большинства? Наиболее популярным правилом голосования при числе кандидатов большем двух является правило относительного большинства.

3.1. Правило относительного большинства

Каждый избиратель отдает свой голос наиболее предпочтительному для себя кандидату — оставляет одно имя в бюллетене, остальные вычеркивает. Избирается кандидат, получивший наибольшее число голосов.

Пример 1. Четыре кандидата a, b, c, d выбираются в четырех избирательных группах, где количество избирателей 3, 5, 7 и

6 соответственно:

I	**II**	**III**	**IV**
3	5	7	6
a	a	b	c
d	c	d	d
c	d	c	b
b	b	a	a

По правилу относительного большинства a набирает 8 голосов, b набирает 7 голосов, c набирает 6 голосов, d набирает 0 голосов. Следовательно, победителем является кандидат a. Но насколько хорош кандидат a? 13 избирателей против 8 считают, что $b \succ a$, также 13 избирателей против 8 считают, что $c \succ a$ и еще 13 избирателей против 8 считают, что $d \succ a$. То есть, для большинства избирателей кандидат a является худшим из всех кандидатов.

□

Пример 2. В пяти избирательных группах, с количеством избирателей соответственно 9, 7, 6, 2 и 4 выбирают одного из четырех кандидатов a, b, c, d:

I	**II**	**III**	**IV**	**V**
9	7	6	2	4
a	b	c	c	d
d	d	b	a	c
b	c	d	b	b
c	a	a	d	a

По правилу относительного большинства a набирает 9 голосов, b набирает 7 голосов, c набирает 8 голосов, d набирает 4 голоса. Следовательно, победителем также является кандидат a. Проанализируем и здесь ситуацию с победителем. 17 избирателей из 28 считают, что $b \succ a$, 19 избирателей считают, что

$c \succ a$ и еще 17 избирателей считают, что $d \succ a$. Кроме того, 17 избирателей поставили кандидата a на последнее место, то есть абсолютное большинство считает, что этот кандидат — наихудший.

$\square$

Что мы видим? Формально правило относительного большинства учитывает волю большинства. Однако, это правило может противоречить мнению большинства, т.е. приводить к избранию кандидата, который при парном сравнении проигрывает любому другому кандидату. Заметим, что по данному правилу проходили выборы в России.

3.2. Правило относительного большинства с выбыванием

В первом туре каждый избиратель отдаёт свой голос наиболее предпочтительному для себя кандидату (оставляет одно имя в бюллетене, остальных вычеркивает). Если кандидат набирает строгое большинство голосов, то он избирается. В противном случае во втором туре проводится голосование по правилу большинства с двумя кандидатами, набравшими наибольшее количество голосов в первом туре.

Рассмотрим результаты выборов при данной обработке мнения избирателей, приведенных в примере 1. В первом туре кандидат a набирает 8 голосов, b набирает 7 голосов, c набирает 6 голосов, d набирает 0 голосов. Максимальное количество голосов у кандидата a, но это количество не является строгим большинством ($8 < 11$). Следовательно, проводится второй тур. Во втором туре сравниваются кандидаты a и b. 13 избирателей против 8 считают, что $b \succ a$, следовательно, победителем является кандидат b.

Казалось бы, все правильно и полностью соответствует процедуре голосования. Однако как обстоит дело с кандидатами c и d, которые выбыли в первом туре? 14 против 7 считают, что $c \succ b$, и ровно столько же избирателей считают, что $d \succ a$. Получается, что оба кандидата, выбывших в первом туре, были в два раза лучше победителя!

Рассмотрим теперь результаты выборов в примере 2 по процедуре относительного большинства с выбыванием. В первом туре кандидат a набирает 9 голосов, b набирает 7 голосов, c набирает 8 голосов, d набирает 4 голоса. Максимальное количество голосов у кандидата a, но это количество не является строгим большинством $(9 < 15)$. Следовательно, проводится второй тур. Во втором туре сравниваются кандидаты a и c. 19 избирателей против 9 считают, что $c \succ a$, следовательно, победителем является кандидат c. Здесь тоже все законно. Но в первом туре выбыли кандидаты b и d, при этом 16 избирателей из 28 считают, что $b \succ c$, и 20 избирателей из 29 считают, что $d \succ c$. Получается, что и этот победитель далеко не лучший.

Видно, что партии, не пользующиеся поддержкой большинства избирателей, но выдвинувшие единого кандидата, могут одержать победу на выборах по правилу относительного большинства, если партии, пользующиеся поддержкой большинства избирателей, не смогли договориться и выдвинуть единого кандидата (или если в числе их кандидатов находился «троянский конь»). В то же время правило относительного большинства с выбыванием может сыграть объединяющую роль и привести к победе представителя близких по взглядам партий, которые не смогли договорится о выдвижении единого кандидата (в последнем примере кандидата c). Заметим, что данная система голосования широко использовалась на выборах в Украине.

3.3. Голосование с последовательным исключением

> Сначала устанавливается порядок сравнения кандидатов, затем по правилу большинства кандидаты последовательно сравниваются попарно. Если кандидатов m, то имеем $m-1$ туров голосования. В первом туре сравниваются два первых кандидата из цепочки сравнения, победитель первого тура во втором туре сравнивается с третьим кандидатом в цепочке и так далее. Победитель $(m-1)$-го тура является победителем по данной процедуре. Это правило имеет еще одно название – «олимпийская система»

Определим победителя голосования по данной схеме для примера 2. Пусть порядок сравнения будет такой: $a \to b \to c \to d$. В первом туре 17 из 28 избирателей считают $b \succ a$ и, следовательно, кандидат b выходит во второй тур. Во втором туре 16 из 28 избирателей считают, что $b \succ c$, значит, b выходит в третий тур. В последнем туре 15 из 28 избирателей считают, что $b \succ d$ и, следовательно, избранным по данной системе голосования оказывается кандидат b.

3.4. Правила голосования Кондорсе и Борда

Как показывают примеры, при одном и том же мнении избирателей о кандидатах с помощью различных систем голосования могут быть избраны различные кандидаты.

В античные времена, в основном, обсуждались философские, мировоззренческие вопросы, связанные с голосованием. Первая попытка критического анализа процедур голосования была предпринята лишь в конце XVIII века во Франции. В эти годы вопрос о том, как надо принимать коллективные решения (например, на заседаниях Конвента) приобрел необычайную остроту. Сомнения относительно принципа «решает большинство голосов» возникли не только у законодателей после того, как вопрос о казни Людовика XVI был принят Конвентом 11 декабря 1792 года большинством в один голос. В то время в составе Конвента было 387 депутатов, соответственно мнения «за» и «против» казни распределились почти поровну. 21 января 1793 года казнь привели в исполнение. В Парижской Академии Наук началась активная дискуссия по вопросам организации демократических выборов, включая избрание новых членов Академии. Именно два академика Парижской АН того времени по праву считаются основоположниками теории голосования.

Жан Шарль де Борда (4.5.1733 — 19.2.1799) - физик, геодезист и математик, член Парижской АН. Родился в Даксе (департамент Ланда). Служил офицером сначала в армии, а затем во флоте. Математические работы Борда относятся к дифференциальным уравнениям и сопротивлению жидкостей. Первая работа по математике появилась в 20 лет. Его работы по сопротивлению жидкостей положили основание теории воздухоплавания. Борда входил в Комиссию Лапласа по установлению единообразной системы мер и весов. Во Франции существует общество имени Борда и в память о нем на его родине установлен памятник.

Мари Жан Антуан Никола де Корита, маркиз де Кондорсе (17.9.1743 — 29.3.1794) — философ-просветитель, математик, экономист, социолог, политический деятель. Родился в Рибмоне. Был в дружеских отношениях с Д'Аламбером и Вольтером. Его работы посвящены дифференциальным уравнениям с запаздыванием, теории вероятности. Был избран в 26 лет членом Академии наук и в 1777 году получил пожизненное звание академика-секретаря. Кондорсе приветствовал Великую французскую революцию. В 1791 году он был избран членом Законодательного собрания. Учредительным собранием Франции Кондорсе был назначен главным редактором Конституции. В её проект вошла процедура проведения конституционных выборов, разработанная Кондорсе. Проект Конституции был представлен Национальному Конвенту Франции в феврале 1793г. Однако эта процедура конституционных выборов во Франции не использовалась. В 1791г. во время выборов в Законодательное собрание вышла брошюра Марата «Современные шарлатаны», в которой Марат обличал АН как оплот старого режима, преследуя, в частности, цель дискредитировать Лавуазье, Кондорсе и других членов Академии. В октябре 1793г. Кондорсе вместе с другими депутатами-жирондистами был внесен в список приговоренных к казни, однако ему удалось скрыться в доме вдовы скульптора Верне. В 1776 г. Кондорсе был избран членом Петербургской АН, но по велению Екатерины II его исключили в 1792 г. Жизнь Кондорсе закончилась трагически. Он был арестован 26 марта 1794 г. и через три дня умер в тюрьме «при невыясненных обстоятельствах». Считают, что он принял яд, желая избежать публичной казни.

Теория голосования как наука имеет дату рождения — 16 июня 1770 г. В этот день Ж.-Ш. Борда на заседании Парижской АН сделал доклад «О способе проведения выборов», в котором, обсуждая избрание членов АН, критикует традиционный способ по большинству голосов. Борда предлагает свою процедуру голосования, считая, что от избирателей надо получать больше информации об их отношении к кандидатам, внесенным в избирательный бюллетень.

Правило Борда

Каждый избиратель объявляет свои предпочтения, упорядочивая m кандидатов от лучшего к худшему (безразличие запрещается). Кандидат не получает баллов за последнее место, получает один балл от каждого кандидата за предпоследнее и так далее, получает $m-1$ баллов за первое место. Побеждает кандидат с наибольшей суммой баллов.

Несмотря на то, что в Парижскую АН входили такие ученые, как Монж, Фурье, Лавуазье, Лаплас, Даламбер, Кондорсе, Лагранж и др., доклад Борда не привлек внимание кого-либо из ученых (кроме Кондорсе) и вопрос о процедуре проведения выборов в АН не поднимался на протяжении 14 лет. Кондорсе решил при помощи математических методов синтезировать в некотором смысле «самую естественную» процедуру голосования. Первые попытки приводили Кондорсе к процедуре Борда. Исследователи отмечают сложные, конкурентные взаимоотношения между Борда и Кондорсе. Это, вместе с пониманием дефектов процедуры Борда, привело Кондорсе к решению не публиковать полученные результаты. Дальнейшие его исследования привели к разработке новой процедуры голосования, основанной на принципе попарных сравнений. 17 июля 1784 года на заседании Парижской АН была представлена работа Кондорсе «Эссе о применении вероятностного анализа к принятию решений по большинству голосов». В этой работе Кондорсе впервые вводит представление о попарных сравнениях как основе теории и метода построения процедур голосования.

Процедура Кондорсе

Для заданной таблицы результатов голосования (таблицы предпочтений) победителем по Кондорсе называется кандидат, который побеждает любого другого кандидата при парном сравнении по правилу большинства. Если парные сравнения образуют цикл, то победителя по Кондорсе нет, и говорят, что имеет место так называемый *парадокс Кондорсе.*

Политологи считали парадокс Кондорсе редким явлением. Однако, результаты математического моделирования голосования по методу Кондорсе, приведенные в следующей таблице, показывают, что это не так.

Число кандидатов	Число избирателей					
	3	5	7	9	11	∞
3	0.050	0.069	0.075	0.078	0.080	0.088
4	0.111	0.139	0.150	0.156	0.160	0.176
5	0.160	0.200	0.215	0.230	0.251	0.251
6	0.202	0.255	0.258	0.284	0.294	0.315
7	0.239	0.299	0.305	0.342	0.343	0.369

В таблице указаны вероятности реализации парадокса Кондорсе при соответствующем количестве избирателей и кандидатов.

На следующем заседании АН 21 июля 1784 года Борда вновь докладывает свою работу. Вскоре АН приняла предложенную им процедуру для избрания своих членов. Процедура Борда применялась АН для этих целей до 1800 г., когда она подверглась резкой критике со стороны нового академика — Наполеона Бонопарта — он посчитал ее слишком сложной. Парижская АН вернулась к старой системе выборов «по большинству голосов». Система голосования Кондорсе использовалась в Женеве в течение года при выборах в Национальную ассамблею. В 1794 г. была принята новая процедура голосования, предложенная депутатом Лиюлье, который подробно проанализировал и подверг критике процедуру Кондорсе. Однако, эта процедура также была отменена в 1798 г. после захвата Женевы

Наполеоном. Работы Борда и Кондорсе оказали влияние на разрабатывавшуюся в то время Конституцию США.

Пример 2 (продолжение). Определим победителя по Борда для результатов предпочтений, содержащихся в примере 2. В выборах участвует $m = 4$ кандидата. Кандидат не получает баллов за 4-е место, за 3-е место получает 1 балл, за 2-е место – 2 балла, за 1-е место – 3 балла. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\text{Кандидат } a \text{ получает} \quad \Sigma_a = 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 31\,\text{очко}\\
&\text{Кандидат } b \text{ получает} \quad \Sigma_b = 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = 48\,\text{очков}\\
&\text{Кандидат } c \text{ получает} \quad \Sigma_c = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 39\,\text{очков}\\
&\text{Кандидат } d \text{ получает} \quad \Sigma_d = 4 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 50\,\text{очков}
\end{aligned}$$

Таким образом, победителем по Борда является кандидат d. Победителем же по Кондорсе является кандидат b, который побеждает кандидата a со счетом 17:11, кандидата c со счетом 16:12, кандидата d со счетом 15:13.

□

В XIX веке шел процесс эмпирического поиска новых процедур голосования, которые не привели к появлению «абсолютно приемлемой» процедуры голосования. В конце XIX века благодаря работам итальянского математика В. Парето была понята естественность возникновения многокритериальной ситуации при оценке качества процедур голосования. Рассмотрим некоторые из этих новых процедур голосования и аксиом.

3.5. Обобщения процедур Кондорсе и Борда

Естественным обобщением процедуры Борда является

Голосование с подсчетом очков

При m кандидатах фиксируем неубывающую последовательность чисел $s_0 \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_{m-1}$, причем $s_0 < s_{m-1}$. Избиратели упорядочивают кандидатов, причем s_0 очков даётся за последнее место, s_1 — за предпоследнее и т.д. Избирается кандидат с максимальной суммой очков.

Данная процедура достаточно широко используется на практике. Покажем, что результаты голосовании существенно зависят от выбора чисел s_i. Так, по результатам предпочтений из примера 2 по процедуре Борда (т.е. $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$) побеждает кандидат d; при $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 4$ побеждает кандидат b; при $s_0 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 4$ побеждает кандидат a.

Если $s_0 = s_1 = \cdots = s_{m-2} = 0, s_{m-1} = 1$, то данная процедура совпадает с процедурой голосования по методу относительного большинства.

Приведем два наиболее естественные обобщения процедуры Кондорсе.

Правило Копленда

Сравним кандидата a с любым другим кандидатом x. Начислим ему $K(a \succ x) = +1$, если для большинства $a \succ x$, $K(a \succ x) = -1$, если для большинства $x \succ a$ и $K(a \succ x) = 0$ при равенстве в оценке кандидатов. Оценкой Копленда для кандидата a назовем сумму $K(a) = \sum\limits_x K(a \succ x)$. Избирается кандидат с наивысшей оценкой Копленда.

Правило Симпсона

Рассмотрим кандидата a и любого другого кандидата x. Обозначим через $S(a \succ x)$ число избирателей, для которых $a \succ x$. Оценкой Симпсона для кандидата a назовем минимальное из числе $S(a \succ x)$: $S(a) = \sum\limits_x S(a \succ x)$. Избирается кандидат с наивысшей оценкой Симпсона.

Победитель по Кондорсе получает наивысшую оценку Копленда $m-1$, а также оценку Симпсона выше $\dfrac{n}{2}$.

С середины XX века возник новый всплеск интереса к проблемам голосования. В 1973 году американский математик П. Фишберн поставил точку в решении вопроса о различии процедуры Борда и процедуры Кондорсе.

Теорема Фишберна. Существуют профили голосования такие, что победитель по Кондорсе не может быть избран ни при каком методе подсчета очков.

Доказательство. Рассмотрим профиль голосования в четырех группах:

Очки	**I**	**II**	**III**	**IV**
	3	6	4	4
s_2	c	a	b	b
s_1	a	b	a	c
s_0	b	c	c	a

Запишем количество балов, которые наберет каждый из кандидатов:

Кандидат a получает $\Sigma_a = 6 \cdot s_2 + 7 \cdot s_1 + 4 \cdot s_0$

Кандидат b получает $\Sigma_b = 8 \cdot s_2 + 6 \cdot s_1 + 3 \cdot s_0$

Кандидат c получает $\Sigma_c = 3 \cdot s_2 + 4 \cdot s_1 + 10 \cdot s_0$

Оценим разность баллов кандидата a и кандидата b: $\Sigma_b - \Sigma_a =$

$2s_2 - s_1 - s_0 > 0$, так как $s_0 \leqslant s_1$, $s_1 \leqslant s_2$ и $s_0 < s_2$, то есть $(s_0 + s_1) < 2s_2$. Таким образом, получаем, что $b \succ a$ при любом наборе s_0, s_1, s_2. Следовательно, процедуры Кондорсе и Борда принципиально различны.

■

4. Парадоксы голосования и причины их возникновения.

Анализ рассмотренных примеров уже показал, что абсолютно демократическим способом можно выбрать такого победителя, который по мнению абсолютного большинства избирателей является наихудшим. Почему возникает такой парадокс? Ведь никаких нарушений демократичных процедур голосования не было, решение принималось исключительно на основе мнения избирателей! Оказывается, далеко не всегда процедура голосования обладает свойствами, которые соответствуют интуитивному пониманию понятия справедливого или правильного социального выбора. Рассмотрим некоторые из этих свойств подробнее.

Монотонность.

Предположим, что кандидат a выбирается (среди победителей) при данном профиле голосования и профиль изменится только так, что положение кандидата a улучшается, а относительное сравнение пары любых других кандидатов для избирателя остается неизменным. Тогда кандидат a для нового профиля по-прежнему должен быть выбран (вновь среди победителей).

Требованию монотонности не удовлетворяет, например, правило относительного большинства с выбыванием, которое широко используется при выборах в Украине.

Пример 4. В четырех избирательных группах с количеством избирателей соответственно 6, 5, 4 и 2 определяется победитель из трех кандидатов a, b, c. Мнения избирателей представлены в профиле А:

Профиль А			
I	**II**	**III**	**IV**
6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

По правилу относительного большинства во второй тур проходят a и b и побеждает a (11 голосов против 6). Предположим, что профиль А – это данные социологического опроса. И было решено провести активную агитацию в наименьшей из избирательных групп. Получили новый профиль голосования:

Профиль Б			
I	**II**	**III**	**IV**
6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

В этом профиле кандидат a улучшил свои позиции в четвертой избирательной группе — вышел на первое место. Определим победителя по профилю Б. Кандидат a теперь уверенно выигрывает в 1-ом туре и … проигрывает во 2-ом туре кандидату c, т.е. улучшение позиции кандидата a привело к его поражению. Как же так? В профиле Б произошло только улучшение положения кандидата! Возникает вопрос: на чьи деньги проводили агитацию в четвертой избирательной группе?

□

Таким образом, по правилу относительного большинства с выбыванием может быть выгодно специально проиграть выборы на некотором участке, чтобы вывести во второй тур соперника, у которого можно выиграть заключительный тур выборов. В истории известны такие случаи.

Анонимность.

Имена избирателей не имеют значения: если два избирателя поменяются голосами, то результаты выборов не изменятся.

Это условие требует, чтобы мнения всех избирателей были равноценными для процедуры голосования. Такое требование реализуется принципом равноправия избирателей. Однако, существуют процедуры голосования, сознательно придающие мнению одного или части избирателей больший вес (например, председатель правления или члены правления имеют два голоса). Или, например, упорядочение судейских голосов, которое активно используется спортивными отделами газет для определения мест, занятых спортивными командами и передачи информации комментаторами по телефону. Примером такой процедуры является также право вето, которым обладают постоянные члены Совета Безопасности ООН. Может оказаться, что внешне равноправная процедура на самом деле такой не является.

Нейтральность.

Имена кандидатов не имеют значения. Если мы поменяем местами кандидатов a и b в предпочтении каждого избирателя, то исход голосования изменится соответственно (если раньше выбирался a, то теперь будет выбираться b и наоборот; если выбирался некоторый кандидат x, отличный от a и b, то он же и будет избран.

Это свойство также реализуется принципом равноправия кандидатов. Но существуют процедуры, сознательно нарушающие это требование. Например, на голосование ставится поправка к некоторому существующему положению (законопроекту, Конституции). При этом часто требуется для внесения поправки получить больше, например, $\frac{2}{3}$ голосов избирателей, т.е. поправка и существующее положение находятся в неравноправном положении. Иногда неравноправие возникает неявно. Правило Копленда и Симпсона анонимны и нейтральны, если мы рассматриваем их как отображения, ставящие в соответствие каждому профилю предпочтений подмножество победителей. Правило Борда также анонимно и нейтрально. Это же справедливо для для правила голосования с подсчетом очков, если все очки разные. Если ввести некоторое правило при равенстве очков, выделяющее единственного победителя, то либо анонимность, либо нейтральность нарушатся. Это очевидно следует из рассмотрения примера 0.

Пример 5. Предположим, что на некотором заседании по правилу голосования с последовательным исключением производится отбор альтернативного законопроекта a, b, c, d (технического проекта, нового образца для производства и т.п.). Мнения участников заседания приведены в следующей таблице:

I	**II**	**III**	**IV**
1	2	1	1
d	a	d	b
b	b	c	c
a	c	a	d
c	d	b	a

Председатель заседания ставит на голосование проекты в последовательности $a \to b \to c \to d$. При первом голосовании во второй тур выходит a, при втором голосовании $a \succ c$ и на третий тур выходит опять a. На заключительном туре $d \succ a$ и, следовательно, побеждает d. Легко проверить, что при последовательном сравнении $a \to b \to d \to c$ побеждает c, при $b \to d \to a \to c$ побеждает a и при $a \to d \to b \to c$ побеждает b. Таким образом, используя то, что голосование с последовательным исключением не является нейтральным, председатель заседания может в рассматриваемом случае за счет выбора соответствующей последовательности сравнения добиться любого результата голосования.

Оптимальность по Парето.

Если кандидат a для всех лучше кандидата b, то кандидат b не может быть победителем.

Пример 6. Рассмотрим следующую таблицу:

I	**II**	**III**
1	1	1
b	a	c
a	d	b
d	c	a
c	b	d

По правилу голосования с последовательным исключением при использовании последовательности $a \to b \to c \to d$ имеем $a \succ b$, далее второй тур — $c \succ b$, в третьем туре $d \succ c$. Следовательно, побеждает d. В то же время кандидат a для всех избирателей лучше кандидата d.

□

Из примера 6 видно, что правило голосования с последовательным выбыванием (олимпийская система) не является оптимальным по Парето. Правило Копленда и Симпсона оптимальны по Парето, Правило Борда также оптимально по Парето. Это же справедливо для правила голосования с подсчетом очков, если очки разные: $s_k < s_{k+1}$.

Пример 7. Четыре кандидата a, b, c, d борются за звание победителя. Избиратели сгруппированы в 4 группы и имеют следующие предпочтения:

I	**II**	**III**	**IV**
3	3	5	4
a	a	d	b
d	d	b	c
c	b	c	a
b	c	a	d

По предварительным данным, победитель по Симпсону — a. Победителя по Кондорсе нет.

Четыре студента, обсуждая избирательную кампанию в пивбаре, пришли к общему мнению по поводу кандидатов — $c \succ a \succ b \succ d$ — и решили принять участие в выборах. С их приходом профиль голосования меняется:

I	**II**	**III**	**IV**	**V**
3	3	5	4	4
a	a	d	b	c
d	d	b	c	a
c	b	c	a	b
b	c	a	d	d

Теперь победитель по Симпсону — b. Пришедшие избиратели считали, что $a \succ b$, то есть они поддержали кандидата a, но в результате такой поддержки кандидат a проиграл выборы. («парадокс неучастия» - лучше бы эти студенты остались допивать пиво и не участвовали в выборах).

□

Таким образом, можно сформулировать еще одно требование к процедурам голосования в виде аксиомы.

Аксиома участия.

Пусть кандидат a является победителем для избирателей из множества N. Рассмотрим некоторого избирателя $x \notin N$ и определим победителя при объединенном множестве избирателей $N \cup x$. Тогда должен быть избран либо кандидат a, либо кандидат, который для избирателя x строго лучше, чем a.

К сожалению нельзя указать лучшую для всех случаев процедуру голосования. Из приведенных примеров видно, что прежде, чем какое-то из правил голосования принимать как процедуру, объединяющую мнения отдельных избирателей в коллективное мнение, нужно глубоко проанализировать эту процедуру, оценить все «за» и «против», и только потом законодательно утверждать такой выбор. Выбор процедуры голосования для каждой конкретной ситуации носит принципиальный характер.

5. Аксиоматика Эрроу. Теорема о невозможности

В 1951 году американский математик и экономист Кеннет Эрроу опубликовал результаты диссертационного исследования в книге «Социальный выбор и индивидуальные ценности» («Social Choise and individual Values», K. Arrow). Основной результат его исследований в дальнейшем получил название «теоремы о невозможности». К. Эрроу поставил перед собой простую и одновременно претенциозную цель: решить проблему рационального согласования индивидуальных интересов, то есть найти некое правило, способ выбора одного из многих альтернативных решений – процедуру выявления воли народа да и вообще, любого сообщества, будь то совет директоров какой-нибудь фирмы, суд присяжных или общее собрание гаражно-строительного кооператива. Он обратился к исследованию давно известной человечеству процедуры — принятию решений большинством голосов. В числе достоинств этой процедуры — простота, равноправие и весомость, обусловленная традицией.

К. Эрроу сформулировал аксиомы, которым должна удовлетворять любая процедура комбинирования или объединения индивидуальных предпочтений, чтобы образовать коллективное суждение. То есть, он впервые провел аксиоматическое исследование рациональных процедур голосования и использовал этот подход для конструирования процедур голосования. Это направление исследования переросло в сравнительный анализ процедур голосования, то есть в выяснение того, в какой мере та или иная процедура удовлетворяет некоторому набору условий и критериев.

Вообще говоря, существует бесконечное множество рациональных процедур голосования, и анализ каждой из них по отдельности — задача невыполнимая. Однако процедуры объединения индивидуальных предпочтений в коллективный выбор общества закрепляются законодательно на уровне Конституции государства. Поэтому требования (аксиомы) были сформулированы Эрроу по отношению к Конституциям. Рассмотрим их более детально.

5.1. Аксиомы Эрроу

Первая аксиома Эрроу. Универсальность.

Она требует, чтобы Конституция отражала каждую возможную конфигурацию предпочтений голосующих. Общество не должно принимать Конституцию, которая может оказаться несостоятельной хотя бы в некоторых структурах предпочтений голосующих. Следовательно, Конституция должна быть общей, чтобы разрешить все возможные споры.

Вторая аксиома Эрроу. Единогласие.

Она управляет действием Конституции, когда нет согласия между избирателями. Для конфигурации предпочтений, при которой каждый индивидуум считает, что $a \succ b$, коллективное предпочтение должно быть таким же.

Третья аксиома Эрроу. Независимость.

Коллективное предпочтение любой пары альтернатив зависит только от предпочтений голосующих, касающихся этих альтернатив. Как бы не менялись индивидуальные предпочтения других альтернатив, если каждое из индивидуальных предпочтений альтернатив a и b остается неизменным, то и коллективное предпочтение альтернатив a и b не меняется.

Введем обозначения:

$\succ$ — отношение индивидуального предпочтения: $a \succ b$ означает, что альтернатива a предпочтительнее альтернативы b;

$\overset{S}{\succeq}$ — отношение слабого коллективного предпочтения: $a \overset{S}{\succeq} b$ означает, что альтернатива a не хуже альтернативы b в смысле коллективного предпочтения;

$\overset{S}{\succ}$ — отношение сильного коллективного предпочтения: $a \overset{S}{\succ} b$ означает, что альтернатива a предпочтительнее альтернативы b в смысле коллективного предпочтения.

Четвертая аксиома Эрроу. Полнота.

Для каждой пары альтернатив a и b должно выполняться или $a \overset{S}{\succeq} b$, или $b \overset{S}{\succeq} a$, или и первое и второе одновременно (в этом случае альтернативы a и b неразличимы в смысле коллективного предпочтения).

Пятая аксиома Эрроу. Транзитивность.

Слабое коллективное предпочтение $\overset{S}{\succeq}$ должно быть транзитивно, т.е. если $a \overset{S}{\succeq} b$ и $b \overset{S}{\succeq} c$, то $a \overset{S}{\succeq} c$. Кроме того, Эрроу требует транзитивности и для отношения строгого коллективного предпочтения $\overset{S}{\succ}$: если $a \overset{S}{\succ} b$ и $b \overset{S}{\succ} c$, то $a \overset{S}{\succ} c$.

Примеры транзитивных отношений — сравнение действительных чисел. Но, например, отношение «быть знакомым» не является транзитивным.

Если конституция является $\overset{S}{\succ}$-транзитивной и при этом удовлетворяет остальным аксиомам Эрроу, то такая конституция является нейтральной, то есть если из частной конфигурации упорядочения альтернатив u и v следует, что коллективно предпочитается v, то из той же конфигурации предпочтений a и b следует, что коллективно предпочитается альтернатива b.

К. Эрроу ввел, на первый взгляд, очевидные требования, которым должно подчиняться правило голосования. Попробуем определить функцию коллективного предпочтения, которая удовлетворяла бы этим требованиям.

5.2. Функция коллективного предпочтения

Пусть имеется n избирателей и m кандидатов. Нужно построить функцию, которая определяет коллективный порядок на множестве кандидатов, т.е. правило, которое для любых заданных порядков $\overset{1}{\succ}$, $\overset{2}{\succ}$, $\ldots$, $\overset{m}{\succ}$ определяет коллективный порядок $f\left(\overset{1}{\succ}, \overset{2}{\succ}, \ldots, \overset{m}{\succ}\right)$.

Таких функций может существовать много. Например, функция может объявлять всех кандидатов равными. Но толку от такой функции — никакого.

Наложим некоторые ограничения на функцию f. Она должна быть определена для любого конечного числа кандидатов (например, для $m = 2$ либо первый лучше, либо второй кандидат лучше, либо оба равны), т.е. удовлетворяет аксиоме полноты.

Определение 1. Пусть $S = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество избирателей и задано подмножество $A \subset S$, называемое коалицией. Коалиция A называется f-решающей для кандидата a против кандидата b тогда и только тогда, когда из того, что для всех избирателей из A справедливо соотношение $a \overset{A}{\succ} b$ и для всех избирателей из $S \setminus A$ справедливо противоположное соотношение $b \overset{S\setminus A}{\succ} a$ следует, что $a \overset{S}{\succ} b$. Обозначают это так: $A = f(a, b)$.

Функция f определяет порядок вида $\dots a \overset{S}{\succ} \dots \overset{S}{\succ} b \dots$. Коалиция A зависит от конкретных кандидатов a и b и не обязана быть f-решающей для кандидата c против кандидата d.

Определение 2. Если для любых двух кандидатов x и y коалиция A является f-решающей для кандидата x против кандидата y, то такая коалиция называется f-решающей.

Докажем ряд утверждений, которые показывают, что в кажущейся разумной системе пяти аксиом имеется серьезная внутренняя проблема.

Лемма 1. *Существует пара кандидатов (a, b) такая, что найдется коалиция, состоящая из одного избирателя $D = \{d\}$, являющаяся f-решающей для кандидата a против кандидата b.*

Доказательство. Пусть F — множество коалиций F_k, для каждой из которых существует пара кандидатов (a, b) таких, что $F_k = f(a, b)$ (для каждой коалиции из F эта пара кандидатов своя). Множество $F \neq \varnothing$, так как $S \subset F$, то есть F включает в себя и множество всех избирателей.

Возьмем коалицию D из F, которая содержит наименьшее число избирателей, то есть $|D| = \min\limits_{F_k \subset F} |F_k|$. Так как $F \neq \varnothing$, то $|D| \geqslant 1$, то есть D содержит не менее одного избирателя. Докажем, что D

содержит ровно одного избирателя.

Предположим, что D можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества: $\{d\}$ — из одного избирателя и $E = D \setminus \{d\}$ — из всех остальных. Тогда всего получается 3 группы избирателей:

Группа избирателей	$\{d\}$	E	$S \setminus D$
Кандидаты	a	c	b
	b	a	c
	c	b	a

Так как коалиция D является f-решающей для кандидата a против кандидата b, то $a \succ b$.

Если $c \succeq b$, то коалиция E является f-решающей для кандидата c против кандидата b. Но в E меньше избирателей, чем в D, которая по определению минимальна. Следовательно, c не может быть не хуже, чем b. Тогда, в силу аксиомы полноты, b лучше, чем c.

Теперь мы имеем, что $a \succ b$ и $b \succ c$. Тогда по аксиоме транзитивности $a \succ c$. А это означает, что $\{d\}$ является f-решающей для кандидата a против кандидата c, что также противоречит минимальности коалиции D. Мы пришли к противоречию и, тем самым, лемма доказана.

■

Лемма 2. *Коалиция $D = \{d\}$, существование которой доказано в лемме 1, является f-решающей.*

Доказательство. Пусть c — произвольный кандидат. Рассмотрим профиль голосования:

Группа избирателей	$\{d\}$	$S \setminus D$
Кандидаты	$\dots$	$\dots$
	a	b
	$\dots$	$\dots$
	b	c
	$\dots$	$\dots$
	c	a
	$\dots$	$\dots$

Избиратель d считает, что $a \succ b$ и $b \succ c$, а все остальные считают, что $b \succ c$ и $c \succ a$. Так как $\{d\}$ является f-решающей для кандидата a против кандидата b, то $a \succ b$. И мы имеем, что для всех избирателей $b \overset{S}{\succ} c$ — по аксиоме единогласия. Следовательно, по аксиоме транзитивности $a \succ c$ и этот результат не зависит от b по аксиоме независимости. Следовательно, $\{d\}$ является f-решающей для кандидата a против кандидата c, то есть $d = f(a, c)$. При этом c — некоторый произвольный кандидат.

Проведя аналогичные рассуждения для произвольного кандидата e в профиле голосования

Группа избирателей	$\{d\}$	$S \setminus D$
Кандидаты	$\dots$	$\dots$
	e	c
	$\dots$	$\dots$
	a	e
	$\dots$	$\dots$
	c	a
	$\dots$	$\dots$

мы видим, что $e \overset{S}{\succ} c$, и получаем, что $d = f(e, c)$ для произвольных кандидатов e и c. Это означает, что $\{d\}$ является f-решающей.

■

Лемма 3. *Избиратель d может навязывать свое мнение по поводу любых двух кандидатов a и b при условии, что мнение всех остальных избирателей противоположно.*

В формулировке леммы 3 пока проявляется зависимость мнения диктатора от мнения других – его мнение не такое, как у всех остальных.

Доказательство. Докажем, что как бы ни голосовали остальные избиратели, коллективное мнение будет совпадать с мнением кандидата d. Рассмотрим такие профили голосования, в которых у избирателя порядок вида: $\overset{d}{\succ} a \overset{d}{\succ} \cdots \overset{d}{\succ} c \overset{d}{\succ} \cdots \overset{d}{\succ} b \overset{d}{\succ} \ldots$, все остальные избиратели полагают $c \succ a$и $c \succ b$, а в остальном их расположение кандидатов произвольно.

Так как $\{d\}$ является f-решающей, то $a \overset{d}{\succ} c$. Для всех избирателей $c \succ b$, следовательно, в силу аксиомы единогласия $c \overset{S}{\succ} b$. Тогда по аксиоме транзитивности получаем, что $a \overset{d}{\succ} b$. Исключая из соотношений кандидата c (по аксиоме независимости), получаем, что, если избиратель d считает, что кандидат a лучше, чем кандидат b, то кандидату a будет оказано коллективное предпочтение $a \overset{S}{\succ} b$.

То есть, из $a \overset{d}{\succ} b$ следует $a \overset{S}{\succ} b$. Это означает, что порядок предпочтений у избирателя d и коллективное предпочтение совпадают. Следовательно, если $b \overset{d}{\succ} a$, то $b \overset{S}{\succ} a$. Таким образом, $a \overset{d}{\succ} b \Leftrightarrow a \overset{S}{\succ} b$.

■

Лемма 3 показывает, что единственный кандидат может диктовать свои предпочтения коллективу избирателей. То есть этот кандидат является **диктатором**. Таким образом, получаем неожиданный результат: при всей разумности выдвигаемых требований к процедурам голосования, имеется только одна процедура, удовлетворяющая всем пяти аксиомам — это правило диктатора. Независимо от предпочтения других избирателей, она устанавливает тот коллективный порядок, который определяется первым избирателем (вместо первого может быть второй или третий, это не имеет значения). Диктатор — это личность, обладающая властью навязывать обществу свое строгое предпочтение для произвольной пары альтернатив. Роль диктатора может выполнять, например, партия или религия, угроза большой войны, авторитет влиятельного меньшинства и проч. Получается, что для решения «тупиков демократии» требуется внешнее давление на общество, которое лишает избирателей хотя бы части их свободы.

5.3. Теорема о невозможности

К. Эрроу, будучи искренним приверженцем демократии и гражданином США, не мог удовлетвориться таким результатом. Он дополнил систему аксиом еще одной.

Шестая аксиома Эрроу. Отсутствие диктатуры. Теперь в совокупности уже шесть аксиом являются противоречивыми. Шестая аксиома исключает существование единственной процедуры, которая удовлетворяет первым пяти. Окончательный вывод Эрой сформулировал в виде теоремы.

Теорема о невозможности. *Не существует правила, объединяющего индивидуальные предпочтения в коллективное, которое удовлетворяет всем шести аксиомам Эрроу.*

6. Заключение

В течении последних лет ученые не переставали исследовать аксиомы Эрроу в попытке обойти его теорему о невозможности, стремясь ослабить сформулированные им требования.

Отказ от аксиом универсальности и независимости не пролил свет на реальные механизмы выбора. Ряд попыток исследовать другие аспекты механизмов выбора при общих предположениях также привели к отрицательным результатам. В частности было известно, что в процессах коллективного выбора участники могут добиваться лучших для себя исходов, давая ложную информацию о своих предпочтениях, и возникла проблема: построить механизм, который был бы неманипулируем, то есть делал бы дезинформацию невыгодной. В 1973 г. Гиббард доказал, что универсальных неманипулируемых и не диктаторских механизмов не существует.

Один из основных методологических постулатов теории социального выбора состоит в том, что долговременно действующие механизмы должны быть наилучшими из возможных. Этот постулат базируется на дарвинистском представлении о естественном отборе. Благодаря ему грань между нормативной и дескриптивной теорией оказывается размытой, проблема сводится к правильной формулировке понятия оптимальности. Постулат оптимальности нашел впечатляющее (хотя лишь частичное) подтверждение в теории экономического равновесия, но, видимо, не оправдал себя в теории социального выбора. Ответ на основной вопрос: "Чем выделяются механизмы, эффективно действующие в реальности?"так и не был получен.

Эта проблема вызывает широкий интерес, так как она тесно связано с ключевыми вопросами экономики, философии, общественных наук. Построенная Эрроу теория показала, что нельзя синтезировать идеальную систему голосования не потому, что не хватает фантазии, а потому, что такой системы не может быть — рациональный общественный выбор не может быть компромиссным.

За эту работу К.Эрроу в 1972 году получил Нобелевскую премию. Главный вывод К. Эрроу определяет ограничения на правила коллективного принятия решений: три общепризнанные цели — коллективная рациональность, способность принимать решения и равенство власти оказываются в непримиримом противоречии. Если общество отказывается от коллективной рациональности, тем самым принимая необходимую произвольность и возможность оказывать влияние на нерациональные процедуры, то принцип большинства обеспечит выбор, так как с его помощью можно достичь две другие цели. Если общество настаивает на сохранении некоторой степени коллективной рациональности, то оно может достичь равенства, приняв правило консенсуса, но только ценой крайней нерешительности. Общество может увеличить способность принимать решения, концентрируя право вето во все более узком кругу индивидуумов.

Исследования К.Эрроу привели к более глубокому пониманию существующих методов голосования и, возможно, помогут создать более совершенные. Но возможности строго ограничены и решительные компромиссы неизбежны.

Выбор процедуры голосования является сложной проблемой, включающей в себя философские, мировоззренческие, психологические и технические аспекты, и как мы уже говорили, носит принципиальный характер.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является предметом изучения в теории голосования?
2. Что такое конфликтная ситуация?
3. Причины возникновения конфликтов.
4. Какого рода конфликты разрешаются голосованием?
5. Что такое профиль голосования?
6. Что такое процедура голосования?
7. Что такое парадокс голосования?
8. Сформулируйте правило относительного большинства. Есть ли у нее недостатки?
9. Сформулируйте правило относительного большинства с выбыванием. Есть ли у нее недостатки?
10. Какова роль процедур, основанных на правиле большинства в жизни политической системы и демократического государства?
11. Сформулируйте процедуру голосования с последовательным исключением. Почему результат зависит от выбора порядка сравнения?

12. Какова роль маркиза де Кондорсе и Жана-Шарля де Борда в формировании теории голосования?
13. В чем заключается основное отличие процедуры Борда от процедур, основанных на правиле большинства?
14. Какая идея заложена в процедуре Кондорсе?
15. Являются ли процедуры Борда и Кондорсе различными по существу? Ответ обоснуйте.
16. Какая проблема может возникнуть при применении процедуры Кондорсе?
17. Назовите обобщение процедуры Борда.
18. Какие процедуры основаны на идее попарного сравнения?
19. Что означает свойство монотонности процедуры голосования?
20. Что означает свойство анонимности процедуры голосования?
21. Что означает свойство нейтральность процедуры голосования?
22. Что означает свойство Парето-оптимальности процедуры голосования?
23. Как может повлиять на результат голосования появление новой группы избирателей?
24. Опишите вклад К.Эрроу в развитие теории голосования.
25. Перечислите аксиомы Эрроу. Объясните их содержание.
26. Что такое f-решающая коалиция?
27. Возможно ли существование коалиции, состоящей из одного избирателя и при этом являющейся f-решающей?

28. Какая процедура голосования удовлетворяет первым пяти аксиомам Эрроу?

29. Сформулируйте теорему о невозможности.

30. Существуют ли неманипулируемые процедуры голосования?

31. В чем кроются причины нерешительности коллегиальных органов управления и другой крайности — концентрации власти?

Задания для самостоятельной работы

Ниже приводятся задания для самостоятельной работы. Всего вариантов 10, номер варианта для каждого студента определяется преподавателем. В каждом варианте 3 задания. Первое задание заключается в применении всех рассмотренных процедур голосования к профилю голосования, который имеет следующий вид:

Профиль голосования А

Группа	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
Количество	4	3	4	i	3	$11-i$
1-е место	a	b	b	c	d	a
2-е место	b	c	a	d	b	d
3-е место	c	d	d	a	c	c
4-е место	d	a	c	b	a	b

Параметр i указывается в каждом варианте отдельно. Остальные два задания заключаются в проверке аксиом и свойств процедур голосования, доказательстве некоторых простейших фактов и анализе нетривиальных ситуаций, которые могут возникать при реализации различных процедур голосования.

Сроки выполнения, форма сдачи и критерии оценивания определяются преподавателем.

Варианты заданий

Вариант 1.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования A при $i = 1$.

2) В голосовании участвовал 21 избиратель и необходимо было определить победителя среди 5 кандидатов. К сожалению, таблица предпочтений была утеряна. Известно только, что в ней было 2 столбца (т.е. 2 различных профиля предпочтений избирателей). Объясните, почему в такой ситуации обязательно будет абсолютный победитель (получивший абсолютное большинство)? Почему этот победитель победит и при попарном сравнении со всеми остальными кандидатами?

3) Докажите, что если в голосовании с нечетным числом голосующих не будет победителя по Кондорсе, то в любом рейтинге кандидатов, построенном на основании попарного сравнения, как минимум 2 кандидата займут одно и то же место.

Вариант 2.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования A при $i = 2$.

2) Пусть необходимо сделать выбор из 4-х кандидатов (A, B, C и D), используя метод Борда. Всего избирателей 11 человек. После подсчета очков оказалось, что кандидат B получил 32 очка, кандидат C — 29 очков, а кандидат D — 18 очков. Сколько очков получил кандидат A? Кто победитель?

3) Выполняется ли для метода относительного большинства, методов Борда и Кондорсе аксиома оптимальности по Парето? Для каждого метода обоснуйте (докажите или приведите контрпример) свое утверждение.

Вариант 3.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования А при $i = 3$.

2) В голосовании принял участие 21 человек, выбор производился из 5 кандидатов по методу Борда. К сожалению, счетная комиссия запуталась в подсчете очков. По предложению одного из кандидатов, результаты были пересчитаны заново по следующей схеме: 4 очка за 1-е место, 3 очка за 2-е и так далее. Докажите, что результаты голосования при этом не изменятся.

3) Пусть предложен следующий критерий: если большинство голосующих предпочитает альтернативу x альтернативе y, то метод голосования должен поставить x выше y в итоговом рейтинге. Покажите на примерах, что метод относительного большинства, метод Борда и метод Кондорсе не удовлетворяют этому критерию.

Вариант 4.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования А при $i = 4$.

2) Критерий большинства заключается в следующем: если альтернативу x на 1-е место поставило больше 50% голосующих, то она должна стать победителем и по процедуре голосования. Критерий Кондорсе звучит так: если в заданных условиях существует победитель по Кондорсе, то процедура голосования должна выбрать победителем именно его. А теперь объясните (докажите), почему любой метод голосования, нарушающий критерий большинства, нарушает также и критерий Кондорсе?

3) Докажите, что если в голосовании с нечетным числом голосующих не будет победителя по Кондорсе, то в любом рейтинге кандидатов, построенном на основании попарного сравнения, как минимум 2 кандидата займут одно и то же место.

Вариант 5.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования А при $i = 5$.

2) Критерий большинства заключается в следующем: если альтернативу x на 1-е место поставило больше 50% голосующих, то она должна стать победителем и по процедуре голосования. Критерий Кондорсе звучит так: если в заданных условиях существует победитель по Кондорсе, то процедура голосования должна выбрать победителем именно его. Приведите теперь пример голосования по методу Борда, для которого критерий Кондорсе нарушается, а критерий большинства - нет.

3) Выполняется ли для метода относительного большинства, методов Борда и Кондорсе аксиома оптимальности по Парето? Для каждого метода обоснуйте (докажите или приведите контрпример) свое утверждение.

Вариант 6.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования А при $i = 6$.

2) Критерий Кондорсе звучит так: если в заданных условиях существует победитель по Кондорсе, то процедура голосования должна выбрать победителем именно его. Приведите пример голосования по методу относительного большинства с выбыванием, для которого критерий Кондорсе нарушался бы.

3) Пусть предложен следующий критерий: если большинство голосующих предпочитает альтернативу x альтернативе y, то метод голосования должен поставить x выше y в итоговом рейтинге. Покажите на примерах, что метод относительного большинства, метод Борда и метод Кондорсе не удовлетворяют этому критерию.

Вариант 7.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования A при $i = 7$.

2) Удовлетворяет ли метод относительного большинства аксиоме монотонности? А метод Кондорсе? Обосновать ответ (доказать или привести контрпример).

3) Докажите, что если в голосовании с нечетным числом голосующих не будет победителя по Кондорсе, то в любом рейтинге кандидатов, построенном на основании попарного сравнения, как минимум 2 кандидата займут одно и то же место.

Вариант 8.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования A при $i = 8$.

2) Критерий большинства заключается в следующем: если альтернативу x на 1-е место поставило больше 50% голосующих, то она должна стать победителем и по процедуре голосования. Объясните, почему метод относительного большинства с выбыванием удовлетворяет этому критерию. Объясните, почему метод относительного большинства удовлетворяет аксиоме монотонности.

3) Выполняется ли для метода относительного большинства, методов Борда и Кондорсе аксиома оптимальности по Парето? Для каждого метода обоснуйте (докажите или приведите контрпример) свое утверждение.

Вариант 9.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования A при $i = 9$.

2) Критерий большинства заключается в следующем: если альтернативу x на 1-е место поставило больше 50% голосующих, то она должна стать победителем и по процедуре голосования. Объясните, почему метод относительного большинства с выбыванием

удовлетворяет этому критерию. Удовлетворяет ли метод Кондорсе аксиоме монотонности? Ответ обосновать.

3) Пусть предложен следующий критерий: если большинство голосующих предпочитает альтернативу x альтернативе y, то метод голосования должен поставить x выше y в итоговом рейтинге. Покажите на примерах, что метод относительного большинства, метод Борда и метод Кондорсе не удовлетворяют этому критерию.

Вариант 10.

1) Определите победителя по всем известным вам правилам, используя данные из профиля голосования А при $i = 10$.

2) Критерий большинства заключается в следующем: если альтернативу x на 1-е место поставило больше 50% голосующих, то она должна стать победителем и по процедуре голосования. Удовлетворяет ли метод Кондорсе этому критерию? Ответ обосновать. Объясните также, почему метод относительного большинства удовлетворяет аксиоме монотонности.

3) Выполняется ли для метода относительного большинства, методов Борда и Кондорсе аксиома оптимальности по Парето? Для каждого метода обоснуйте (докажите или приведите контрпример) свое утверждение.

Литература

[1] Вольский В.И. Турнирные функции в задачах коллективного и многокритериального выбора. Исследования по теории структур. - М.: Наука, 1987.

[2] Вольский В.И., Лезина З.М. Голосование в малых группах. Процедуры и методы сравнительного анализа. - М: Наука, 1991. - 192 с.

[3] Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. - М.: Наука, 1985. - 272 с.

[4] Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. - М.: Наука, 1979. - 200 с.

[5] Маркин Б.Г. Проблема группового выбора. - М.: Наука, 1974. - 256 с.

[6] Моисеев Н.Н. Математика - управление - экономика. - М.: Знание, 1970. - 60 с.

[7] Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. - М.: Мир, 1991. - 464 с.

[8] Arrow K.J. Social Choice and Individual Values. - New York: Wiley, 1951. - 124 p.

[9] Gibbard A. Manipulation of voting schemes: A general result. Econometrica – 1973 - V. 41, 587 p.