Биматричные игры. Решение игр 2×2

Будем рассматривать 2×2 биматричную игру с матрицами выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \ .$$

Матрица A описывает выигрыши первого игрока, B, соответственно, второго. Смешанные стратегии игроков полностью описываются в этом частном случае вероятностью применения своей первой стратегии каждым из игроков, т.е. их можно записать в виде

$$x = (\xi, 1-\xi) \ , \qquad y = (\eta, 1-\eta) \ .$$

Поскольку $0 \le \xi, \eta \le 1$, то каждая игровая ситуация в смешанных стратегиях в 2×2 биматричной игре может быть изображена точкой на единичном квадрате на плоскости (ξ, η).

(Вопрос: где будут находится ситуации в чистых стратегиях ?)

Идея нахождения решения игры состоит в следующем: мы опишем множества приемлемых ситуаций для каждого из игроков, затем нарисуем эти множества на единичном квадрате и графически найдем их пересечение. Очевидно, найденное решение (или множество решений) является равновесием по Нэшу.

(Вопрос: как определяется ситуация равновесия по Нэшу ?)

Итак, начнем с первого игрока. Игровая ситуация (x, y) (то есть, первый игрок применяет смешанную стратегию x, а второй — y) будет приемлемой для него, если

$$\begin{aligned} a_1 y^T &\le x A y^T \ , \\ a_2 y^T &\le x A y^T \ . \end{aligned}$$

Здесь a_i — i-ая строка матрицы выигрышей A. Выражение, стоящее в правой части неравенств, является, очевидно, средним выигрышем первого игрока в ситуации (x, y). Как видим, условия, делающие ситуацию приемлемой, никак не зависят от матрицы B. Первому игроку абсолютно неинтересно, какой выигрыш получит второй игрок. Конечно, то же самое можно будет сказать и про второго игрока.

Выпишем вначале средний выигрыш первого игрока:

$$\begin{aligned} xAy^T &= \begin{pmatrix} \xi & 1-\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ 1-\eta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \xi & 1-\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_{11} - a_{12})\eta + a_{12} \\ (a_{21} - a_{22})\eta + a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\xi\eta + (a_{12} - a_{22})\xi + (a_{21} - a_{22})\eta + a_{22} \ . \end{aligned}$$

Если подставить это выражение в два предыдущих неравенства и упростить их, получим следующее:

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\,(1-\xi)\,\eta + (a_{12} - a_{22})\,(1-\xi) \le 0 \ , \\ (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\,\xi\eta + (a_{12} - a_{22})\,\xi \ge 0 \ . \end{aligned}$$

Введем обозначения: $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$ и $\alpha = a_{22} - a_{12}$. Условия приемлемости ситуации принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}\,(1-\xi)\,\eta - \alpha\,(1-\xi) \le 0 \ , \\ \mathrm{C}\xi\eta - \alpha\xi \ge 0 \ . \end{aligned} \qquad (*)$$

Рассмотрим три частных случая.

Ситуация $(\mathbf{1}, \eta)$**.** В этой ситуации первый игрок выбирает свою первую стратегию. Значит, $\xi = 1$ и первое неравенство в (*), очевидно, удовлетворено. Значит, ситуация будет приемлемой для первого игрока в этом случае, если

$$C\eta - \alpha \geq 0 ,$$

или

$$\eta \geq \frac{\alpha}{C} , \quad \text{если } C > 0 ,$$
$$\eta \leq \frac{\alpha}{C} , \quad \text{если } C < 0 .$$

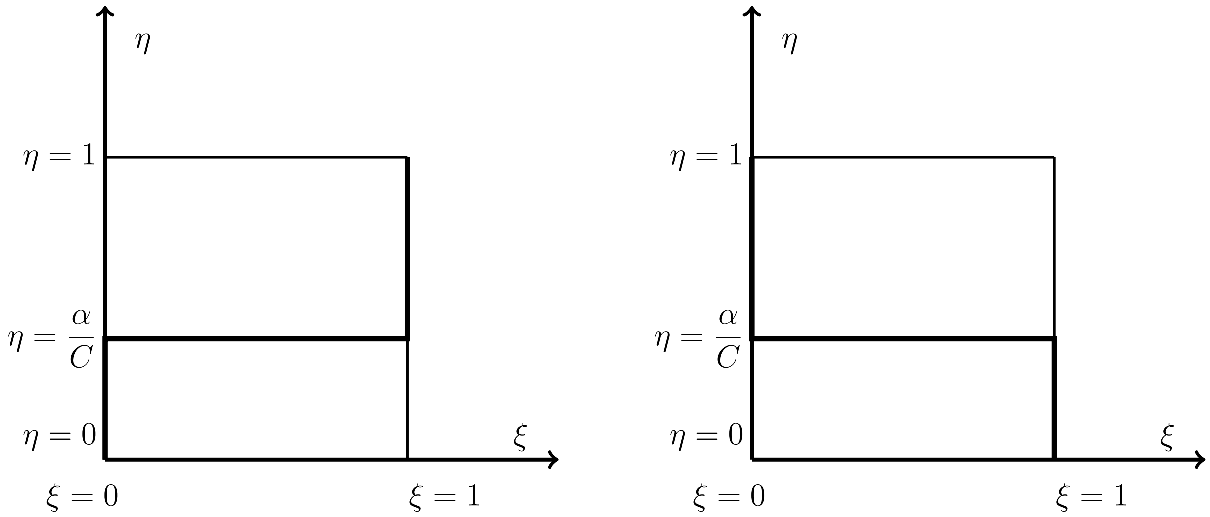
Ситуация $(\mathbf{0}, \eta)$**.** В этой ситуации первый игрок выбирает свою вторую стратегию. Значит, $\xi = 0$ и аналогично предыдущему случаю, одно из условий (*) заведомо выполняется (а именно — второе неравенство), а оставшееся принимает вид:

$$\eta \leq \frac{\alpha}{C} , \quad \text{если } C > 0 ,$$
$$\eta \geq \frac{\alpha}{C} , \quad \text{если } C < 0 .$$

Ситуация (ξ, η), $\xi \in (0, 1)$**.** В такой ситуации мы можем разделить первое неравенство (*) на $(1 - \xi)$, а второе — на ξ. Тем самым, условие приемлемости превращается в уравнение

$$\eta = \frac{\alpha}{C} .$$

Объединение этих трех случаев дает нам все множество приемлемых для первого игрока ситуаций. Изобразим эти ситуации на единичном квадрате.



$C > 0$ $\qquad\qquad$ $C < 0$

Заметим, что этот зигзаг может быть и вырожденным. Действительно, если $C = 0$ и $\alpha \neq 0$, то реализуются только первые две ситуации и множество распадется на два отрезка. Наконец, если и $C = 0$, и $\alpha = 0$, то **любая** допустимая ситуация будет приемлемой для первого игрока (матрица выигрышей состоит в таком случае из двух одинаковых строк и игра становится бессмысленной).

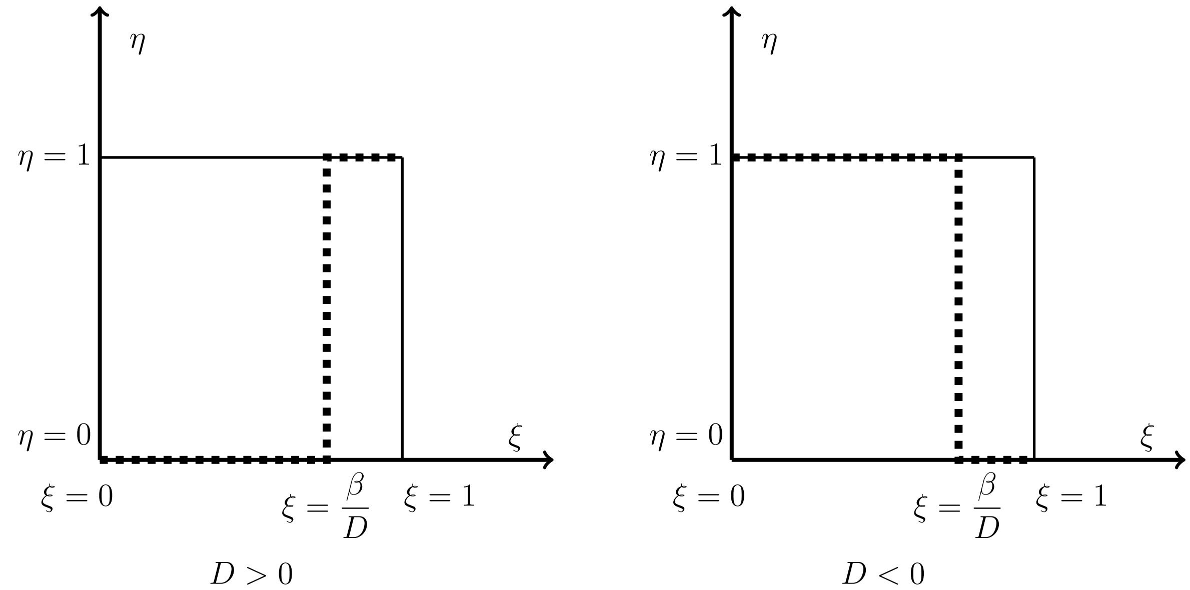
Аналогичные размышления позволяют построить такое же множество и для второго игрока. Однако можно поступить и проще, заметив, что можно заменить матрицу A в предшествующих выкладках на B^T, поскольку мы полагаем, что стратегиям первого игрока соответствуют строки матрицы, а второго — столбцы. Выполнив эту замену, мы сразу получаем следующий результат: множество приемлемых для второго игрока ситуаций определяется двумя параметрами:

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$$

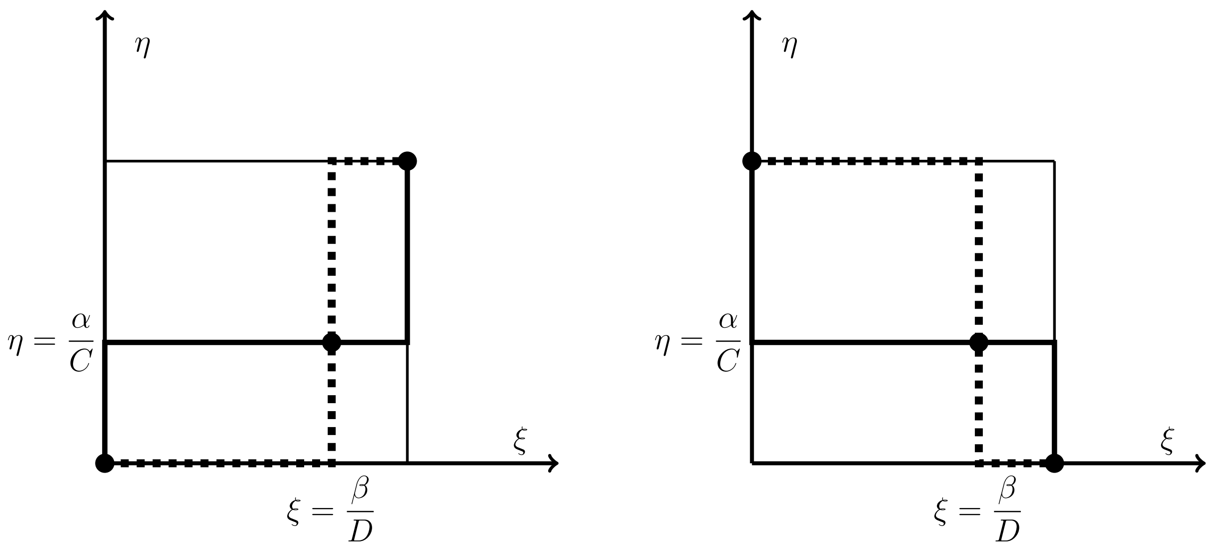
и

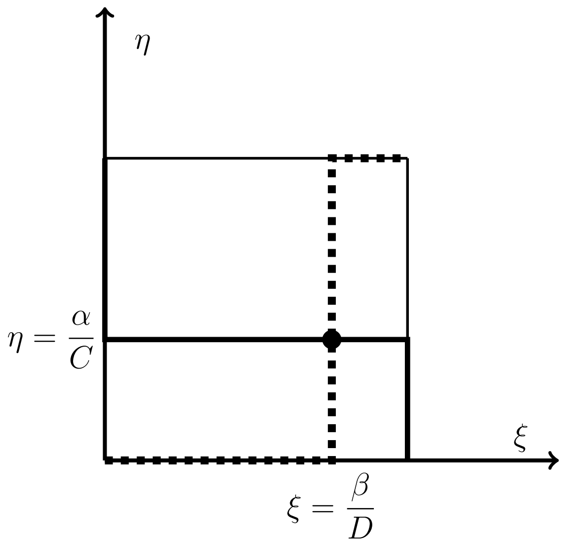
$$\beta = b_{22} - b_{21} \ .$$

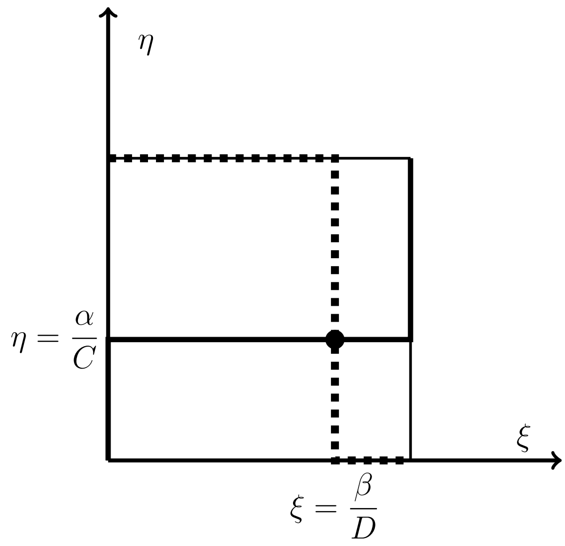
Нарисуем это множество.



Совместим теперь оба эти множества на одном рисунке. В зависимости от знаков величин C и D возможны четыре ситуации:







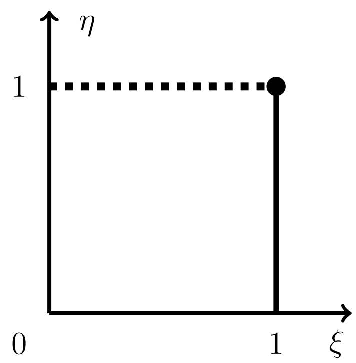
Как видим, точек равновесия может быть либо три, либо одна. Кроме того, если один или оба зигзага выраждены, возможно бесконечное число равновесных ситуаций.

Заметим, что не стоит подходить к изложенному методу слишком формально. Комбинации параметров могут приводит к самым разным ситуациям, которые следует уметь интерпретировать. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.
Пусть матрицы выигрышей игроков имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Применяя рассмотренный метод, получим множества приемлемых ситуаций и изобразим их.



На рисунке непрерывной линией изображено множество приемлемых ситуаций первого игрока, пунктирной — второго. Как видим, в этой игре существует решение в чистых стратегиях: и первый, и второй игрок применяют свои первые стратегии.

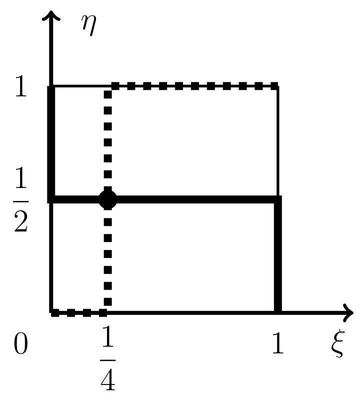
Пример 2.
Пусть матрицы выигрышей игроков имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

В этом случае

$$C = 1 - 4 - 3 + 2 = -4 \qquad \alpha = 2 - 4 = -2 \ ,$$
$$D = -1 + 4 + 3 - 2 = 4 \qquad \beta = -2 + 3 = 1 \ .$$

Изобразим множества приемлемых ситуаций для обоих игроков:

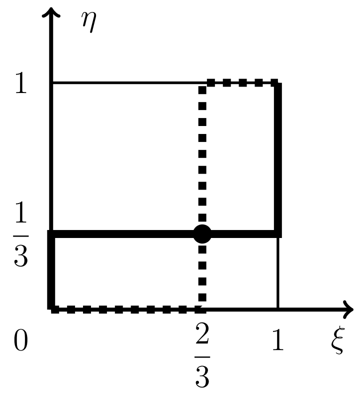


Таким образом, имеется одна ситуация равновесия: $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ и $y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Пример 3.
Пусть матрицы выигрышей игроков имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Нарисуем множества приемлемых ситуаций для обоих игроков:



Решение в смешанных стратегиях одно — это пара $x = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и $y = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Задача подобного типа известна под названием «Семейный спор». Обычно ее излагают в следующей форме: играют двое, муж и жена. Муж хочет смотреть по телевизору футбол, а жена — любимый сериал. Однако оба они предпочтут уступить, лишь бы смотреть передачу вместе. Исходя из этого и распределяются выигрыши.