Матричные игры. Решение конфликта в условиях антагонизма: кто кого победит?

Кичмаренко О.Д.

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

Определение. Примеры.

Матричная игра *- это бескоалиционная игра двух игроков (т.е. антагонистическая игра), причем, каждый из игроков имеет конечное множество стратегий.*

В этой игре выигрыш первого игрока равен проигрышу второго, другими словами – это платеж, который первый игрок получает от второго.
Матричная игра - игра с нулевой суммой.

Пример 1. *Две компании A и B продают два вида лекарств против гриппа. Компания A рекламирует продукцию на радио (A1), телевидении (A2) и в газетах (A3). Компания B, в дополнение к использованию радио (B1), телевидения (B2) и газет (B3), рассылает также по почте брошюры (B4). В зависимости от умения и интенсивности проведения рекламной кампании, каждая из компаний может привлечь на свою сторону часть клиентов конкурирующей компании. Как правильно вести рекламу каждой компании, чтобы максимально привлечь клиентов на свою сторону ?*

Пример 2. *На технологическую линию поступает сырье с малым или большим количеством примесей. Линия может работать в трех режимах. Доход предприятия на 1 ед. продукции, изготовленной из сырья с малым количеством примесей и из сырья с большим количеством примесей для первого, второго и третьего технологических режимов составляет 2 и 5, 5 и 3, 6 и 1 ден. ед. соответственно. В каких режимах и сколько времени должна работать технология, чтобы доход от выпущенной продукции был максимальным?*

Пусть первый игрок имеет m стратегий: $A_1, \ldots, A_m$.
Второй игрок имеет n стратегий: $B_1, \ldots, B_n$.
Тогда эта игра имеет $m \times n$ возможных ситуаций вида (A_i, B_j). И выигрыш первого игрока будет зависеть именно от этой ситуации:

$$v_1 = v_1(A_i, B_j)$$

Поставим строки матрицы A в соответствие стратегиям первого игрока, а столбцы этой же матрицы - в соответствие стратегиям второго игрока.
Тогда каждой ситуации (A_i, B_j) будет соответствовать элемент матрицы с индексом (i, j), а выигрыш первого игрока можно записать как элемент матрицы:

$$a_{ij} = v_1(A_i, B_j).$$

Таким образом, получаем матрицу игры, или платежную матрицу:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Эта платежная матрица и есть модель конфликтной ситуации.

Так как игра — антагонистическая, то выигрыш второго игрока однозначно определяется через выигрыш первого и будет равен $-a_{ij}$.

Далее будем говорить только о выигрыше первого игрока.

Исключение доминируемых стратегий. Нижняя и верхняя цена игры. Понятие решения в чистых стратегиях.

Пусть в примере 1 выигрыш компании А - процент клиентов, привлеченных или потерянных этой компанией, зависит от ситуации (Ai,Bj):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 & 3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

Первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш. Поэтому ему не могут быть интересны стратегии, при которых, независимо от выбора второго игрока, он выиграет меньше.
Первый исключает стратегию A_3 (т.е. вычеркивает третью строку в платежной матрице), т.к. $A_2 \succ A_3$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 & 3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Второй игрок стремится минимизировать свой проигрыш. Ему неинтересны стратегии, при которых он может потерять больше.
Он исключает свою стратегию B_1:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Затем далее он исключает B_3 и B_4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Теперь первый исключает еще и A_1:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, первый игрок считает возможным использование только стратегии A_2, а второй игрок оставил тоже только одну свою стратегию — B_2.

Следовательно, ситуация A_2, B_2 в одинаковой мере устраивает обоих игроков.

Эту ситуацию $(i^*, j^*) = (2, 2)$ и примем в качестве решения игры:

обе компании должны рекламироваться на телевидении, при этом компания А получит выигрыш - 5% клиентов перейдут в число ее потребителей от компании В.

Решение игры гарантирует, что ни одной компании невыгодно выбирать неоптимальную стратегию, т.к. это повлечет потери в выигрыше.

Если второй игрок выберет стратегию B_1, B_3 или B_4, то первый может сохранить свой выбор – A_2, что повлечет бóльшие потери рынка компании B (6% или 8% вместо 5%).

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$$

По тем же причинам нет резона первой компании не выбирать стратегию A_2, т.к., например, если она выберет A_3, то вторая может изменить свой выбор на B_3, что повлечет потерю 9% клиентов у первой компании.

$$a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

Такое понятие равновесия ввел Дж.Нэш (Nash).
Ситуация (i^*, j^*) в матричной игре будет равновесной, если

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Это же двойное неравенство определяет элемент a_{i^*j} как ***седловой элемент*** платежной матрицы.

Как найти все ситуации равновесия?

Цель первого игрока: Выбирать такую стратегию, которая при любом возможном выборе второго игрока обеспечит максимальный гарантированный выигрыш. *«Я должен выиграть не меньше, чем. . . »*

В соответствии с этой целью первый игрок оценивает свои стратегии минимальными возможными выигрышами, независимо от выбора второго игрока:

$$\min_j a_{ij}$$

Тогда, выбрав максимальную из них, он укажет максимальный гарантированный выигрыш для себя:

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

Это значение называется ***нижняя цена игры***.

Цель второго игрока: Выбирать такую стратегию, которая при любом возможном выборе первого игрока обеспечит максимальный допустимый проигрыш. *«Максимум, что я могу себе позволить проиграть. . . »*

В соответствии с этой целью второй игрок оценивает свои стратегии максимальными возможными потерями, независимо от выбора первого игрока:

$$\max_i a_{ij}$$

Тогда, выбрав минимальную из них, он укажет максимально допустимый проигрыш для себя:

$$\min_j \max_i a_{ij}$$

Это значение называется ***верхняя цена игры***.

Равенство нижней и верхней цены игры определяет решение - ***цену игры***.

Элементы матрицы, для которых выполняется равенство минимаксов

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

являются ***седловыми элементами*** платежной матрицы.

Номера строк i^* и номера столбцов j^*, в которых расположены седловые элементы платежной матрицы, указывают на номера ***оптимальных стратегий*** первого и второго игроков соответственно.

Платежная матрица может содержать несколько седловых элементов.

При применении метода исключения доминируемых стратегий из нескольких седловых элементов остается только один.

Значение цены игры не меняется, но выбор каждого игрока теперь ограничен, т.к. для каждого из них указывается только одна оптимальная стратегия.

Таким образом, ***решение матричной игры*** состоит в нахождении всех седловых элементов элементов платежной матрицы. Значение седлового элемента является ***ценой игры***, а номера строк и номера столбцов, в которых находятся седловые элементы, указывают на номера ***оптимальных стратегий*** первого и второго игрока соответственно.

Решения (седловые точки) существуют тогда и только тогда, когда равны минимаксы

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Существование внутренних и внешних минимаксов здесь следует из конечности множеств номеров стратегий i и j.

Схема решения матричной игры

1. Оцениваем каждую стратегию каждого игрока:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \to & \min\limits_j a_{1j} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \to & \min\limits_j a_{mj} \\
\downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & & \\
\max\limits_i a_{i1} & \max\limits_i a_{i2} & \dots & \max\limits_i a_{in} & &
\end{array}
$$

2. Находим значения

$$\max_i \min_j a_{ij} \text{ – нижняя цена игры,}$$

$$\min_j \max_i a_{ij} \text{ – верхняя цена игры.}$$

3. Если нижняя цена игры равна верхней цене, то их общее значение - цена игры, т.е. $a_{i^*j^*}$ - выигрыш первого игрока в равновесной ситуации, номера i^*, j^* - указывают на номера оптимальных стратегий первого и второго игрока соответственно.

Смешанное расширение матричной игры.

Рассмотрим платежную матрицу из примера 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

нижняя цена игры: $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 3$

верхняя цена игры: $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 5.$

То есть

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij},$$

следовательно, седлового элемента нет, а игра с этой платежной матрицей не имеет ситуаций равновесия.

Как понимать то, что мы получили?

Если игроки выберут стратегии, указывающие на нижнюю и верхнюю цену игры, получим ситуацию (A_2, B_1), в которой первый игрок получает больше, чем рассчитывал.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \mathbf{5} & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Устойчива ли ситуация (A_2, B_1)?

1-й игрок, предполагая выбор 2-го, может увеличить свой выигрыш с 5 на 6, отказываясь от стратегии A_2 в пользу A_3, т.е. переход к ситуации (A_3, B_1). В свою очередь, 2-й игрок, предполагая выбор A_3 1-ым игроком, откажется от B_1 в пользу B_2, ожидая проиграть только 1 в ситуации (A_3, B_2). Далее 1-й мог догадаться о таком поведении 2-го игрока и он, стремясь не потерять выигрыш, выбирает A_1, т.е. имеем ситуацию (A_1, B_2). Далее аналогично рассуждая, попадаем в ситуацию (A_1, B_1), а затем снова в (A_3, B_1).

Таким образом, мысленно проигрывая эту игру многократно, каждый игрок будет отдавать свое предпочтение каким-то стратегиям чаще, а каким-то реже.

Интересно, что частоту выбора игроками своих стратегий можно рассчитать и представить в виде набора вероятностей (у каждого игрока свой набор).

В этом случае игра существенно меняется - у игроков расширяются их стратегические возможности: путем случайного применения игроками своих "чистых" стратегий они обеспечивают наибольшую скрытость выбора стратегии.

Понятие решения в этой игре следует понимать уже по-другому.

Смешанной стратегией игрока называется набор вероятностей применения его чистых стратегий:

$$x = (x_1, \ldots, x_m), \quad x_i = p(A_i),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad 0 \le x_i \le 1, \quad i = \overline{1, m}.$$

X – множество всех смешанных стратегий первого игрока.

$$y = (y_1, \ldots, y_n), \quad y_j = p(B_j),$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad 0 \le y_j \le 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

Y – множество всех смешанных стратегий второго игрока.

Пара смешанных стратегий (x, y) называется ***ситуацией*** в смешанном расширении матричной игры.

Функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ является ***выигрышем*** в смешанном расширении матричной игры, который по сути представляет собой математическое ожидание выигрыша:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x\mathbf{A}y^T.$$

Решить матричную игру в смешанном расширении означает найти пару смешанных стратегий (x^*, y^*), которая будет седловой точкой функции выигрыша $f(x, y)$, а также указать значение $f(x^*, y^*)$.

Ситуация (x^*, y^*) является ситуацией равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры, если

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

или что то же самое:

$$x\mathbf{A}{y^*}^T \leq {x^*}^T\mathbf{A}{y^*}^T \leq x^*\mathbf{A}y^T. \tag{1}$$

Введем дополнительные обозначения: через a_{*j} обозначим j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$, а через a_{i*} - i-ю строку.

Лемма 1. ***О переходе к смешанным стратегиям***
Если x - произвольная стратегия первого игрока, a - некоторое число и

$$xa_{*j} \geq a \quad \forall j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

то для любой смешанной стратегии $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ игрока 2 выполняется:

$$x\mathbf{A}y^T \geq a.$$

Доказательство.
Домножим неравенство (2) на $y_j \quad \forall j = \overline{1, n}$:

$$xa_{*j}y_j \geq ay_j.$$

Просуммируем полученные неравенства по $j = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^{n} xa_{*j}y^T = x\mathbf{A}y^T \geq a\sum_{j=1}^{n} y_j = a.$$

Лемма доказана.

Аналогично осуществляются переходы к смешанным стратегиям в неравенствах

$$\begin{aligned} xa_{*j} &\le a, \quad \forall j = \overline{1,n}, \\ a_{i*}y^T &\le a, \quad \forall i = \overline{1,m}, \\ a_{i*}y^T &\ge a, \quad \forall i = \overline{1,m}, \end{aligned}$$

Теорема 1.
Для того, чтобы ситуация (x^*, y^*) была равновесной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$a_{i*}{y^*}^T \le x^* \mathbf{A} {y^*}^T \le x^* a_{*j}, \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

Доказательство.
Необходимость. Пусть ситуация (x^*, y^*) - равновесная, т.е. выполняется (1). Выберем в качестве x и y чистые стратегии i и j, т.е.
$x = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0), \quad y = (0, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0, \ldots, 0).$
Тогда неравенство (1) примет необходимый вид (3).
Достаточность. Применим к обеим частям (3) лемму о переходе к смешанным стратегиям. Имеем:

$$x\mathbf{A}{y^*}^T \leq x^*\mathbf{A}{y^*}^T \leq x^*\mathbf{A}y^T,$$

т.е. (x^*, y^*) - равновесная ситуация.
Теорема доказана.

Теорема 2.
Если ситуация (k, l) является равновесной для игры с матрицей $\mathbf{A}$, то она является равновесной и для ее смешанного расширения.

Доказательство.
Пусть (k, l) - равновесная ситуация в игре $\mathbf{A}$, т.е.

$$a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj} \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \tag{4}$$

В смешанных стратегиях ситуация (k, l) имеет вид
(x^k, y^l), $\quad x^k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0)$,
$\quad y^l = (0, \ldots, 0, \underset{l}{1}, 0, \ldots, 0)$.
Тогда
$a_{il} = a_{i*} y^{l^T}$, $a_{kl} = x^k \mathbf{A} y^{l^T}$, $a_{kj} = x^k a_{*j}$.
(4) примет вид (3), т.е. (x^k, y^l) будет равновесной.
Теорема доказана.

Так как матричная игра — частный случай антагонистической игры, для которой справедлива теорема Нэша (Nesh), т.е. ситуация равновесия в матричной игре всегда существует в смешанных или в чистых стратегиях. Чтобы это показать, достаточно показать существование и равенство минимаксов

$$\max_x \inf_y x\mathbf{A}y^T \text{ и } \min_y \sup_x x\mathbf{A}y^T.$$

Фактически докажем существование и равенство минимаксов

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T \text{ и } \min_y \max_x x\mathbf{A}y^T.$$

Лемма 2.
При любом $y_0 \in Y$ и при любом $x_0 \in X$ существуют (достигаются)

$$\max_x x\mathbf{A}y_0^T \quad \text{и} \quad \min_y x_0\mathbf{A}y^T.$$

Доказательство.

$$x\mathbf{A}y_0^T = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{i*} y_0^T, \qquad x_0\mathbf{A}y^T = \sum_{j=1}^{n} x_0 a_{*j} y_j.$$

Это означает, что $x\mathbf{A}y_0^T, x_0\mathbf{A}y^T$ - линейные, а следовательно и непрерывные функции по своим переменным $x_i, i = \overline{1, m}$ и $y_j, j = \overline{1, n}$ соответственно. Множества X и Y - замкнутые и ограниченные (симплексы), т.е. компактные. Следовательно на них функции $x\mathbf{A}y_0^T, x_0\mathbf{A}y^T$ достигают своих максимума и минимума.
Лемма доказана.

Лемма 3. При любом $x_0 \in X$ существует номер столбца $l(x_0)$ — такой, что

$$\min_y x_0 \mathbf{A} y^T = x_0 a_{*l}$$

и при любом $y_0 \in Y$ существует номер строки $k(y_0)$ — такой, что

$$\max_x x \mathbf{A} y_0^T = a_{k*} y_0^T.$$

Доказательство. Положим $l = arg \min\limits_{j=\overline{1,n}} x_0 a_{*j}$. Тогда

$$x_0 a_{*l} \leq x_0 a_{*j} \qquad \forall j = \overline{1, n};$$

Перейдем в полученном неравенстве к смешанным стратегиям (по лемме 1):

$$x_0 a_{*l} \leq x_0 \mathbf{A} y^T \quad \forall y \in Y.$$

Переходя здесь к минимуму по $y \in Y$, получим

$$x_0 a_{*l} = x_0 \mathbf{A} {y^l}^T \leq \min_y x_0 \mathbf{A} y^T, \quad y^l = (0, \ldots, 0, \underset{l}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Тогда

$$x_0 a_{*l} = \min_y x_0 \mathbf{A} y^T.$$

Доказать самостоятельно, что $\exists k(y_0)$, такое что

$$\max_x x \mathbf{A} y_0^T = a_{k*} y_0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *о непрерывности функций* $\max_x x\mathbf{A}y^T$ *и* $\min_y x\mathbf{A}y^T$

Значение $\max_x x\mathbf{A}y^T$ является непрерывной функцией y, а значение $\min_y x\mathbf{A}y^T$ - непрерывной функцией x.

Доказательство.

Из предыдущей леммы следует, что

$$\min_y x\mathbf{A}y^T = \min_j xa_{*j}.$$

xa_{*j} - скалярное произведение, т.е. линейная функция, а следовательно и непрерывная по x при любом j. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\delta > 0$ — такое, что как только $||x_1 - x_2|| < \delta$, выполняется неравенство $|x_1 a_{*j} - x_2 a_{*j}| < \varepsilon$. Пусть

$$\min_j x_1 a_{*j} = x_1 a_{*k}, \quad \min_j x_2 a_{*j} = x_2 a_{*l}.$$

Рассмотрим

$$\min_j x_2 a_{*j} = x_2 a_{*l}$$

С одной стороны:

$$x_2 a_{*k} > \min_j x_2 a_{*j} = x_2 a_{*l}$$

$$x_1 a_{*k} + \varepsilon > x_2 a_{*k} > \min_j x_2 a_{*j} = x_2 a_{*l}$$
$$\min_j x_1 a_{*j} + \varepsilon = x_1 a_{*k} + \varepsilon > x_2 a_{*k} > \min_j x_2 a_{*j} = x_2 a_{*l}$$

С другой стороны:

$$x_2 a_{*l} > x_1 a_{*l} - \varepsilon$$
$$x_2 a_{*l} > x_1 a_{*l} - \varepsilon > \min_j x_1 a_{*j} - \varepsilon.$$
$$\min_j x_1 a_{*j} + \varepsilon = x_1 a_{*k} + \varepsilon > x_2 a_{*k} > \min_j x_2 a_{*j} =$$
$$= x_2 a_{*l} > x_1 a_{*l} - \varepsilon > \min_j x_1 a_{*j} - \varepsilon.$$

То есть:

$$\left|\min_j x_1 a_{*j} - \min_j x_2 a_{*j}\right| < \varepsilon,$$

что и означает непрерывность функции $\min\limits_j x a_{*j} = \min\limits_y x\mathbf{A}y^T$ по переменной x.

Доказать самостоятельно непрерывность $\max\limits_x x\mathbf{A}y^T$ по переменной y.

Лемма доказана.

Теорема 3.
Минимаксы $\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T$ и $\min_y \max_x x\mathbf{A}y^T$ существуют.

Доказательство.
Т.к. $\min\limits_{y} x\mathbf{A}y^T$ - непрерывная по x функция (Лемма 4), то по теореме Вейерштрасса на компактном множестве X она достигает своего максимума $\max\limits_{x}\min\limits_{y} x\mathbf{A}y^T$.

Аналогично существует $\min\limits_{y}\max\limits_{x} x\mathbf{A}y^T$.

Теорема доказана.

Лемма 5. *о двух альтернативах*
Какова бы ни была матрица **A**, имеет место одна из двух альтернатив:

1. существует $x \in X$, такой что $xa_{*j} > 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$;
2. существует $y \in Y$, такой что $a_{i*}y^T \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$.

Доказательство.

Составим выпуклую оболочку симплекса x_1, т.е. векторов $e^1, \ldots, e^m$, и всех векторов a_{*j}. Обозначим ее через $\mathcal{C}$.

Возможны два случая:

$0 \notin \mathcal{C}$.

Тогда точка 0 отделима от множества $\mathcal{C}$ гиперплоскостью $Vz = 0$, и $\forall z \in \mathcal{C}\ \ Vz > 0$. В частности, $\forall\ i = \overline{1, m} \quad Ve^i = v_i > 0$. Тогда и сумма

$$\sum_{i=1}^{m} v_i > 0.$$

Выберем вектор

$$x = (\frac{v_1}{v}, \ldots, \frac{v_m}{v}) \in X.$$

Тогда, т.к. $v > 0$

$$xz = \frac{1}{v} Vz > 0 \quad \forall z \in \mathcal{C},$$

в частности и для всех точек $a_{*j} \in \mathcal{C}$:

$$xa_{*j} \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

$0 \in \mathcal{C}$. Тогда точку 0 можно представить в виде выпуклой комбинации

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e^i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{*j} = 0, \\ \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \\ \beta_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1. \end{array} \tag{5}$$

Расписывая это равенство покоординатно, получаем:

$$\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ij} = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Учтем, что $\alpha_i \geq 0$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ij} \leq 0. \tag{7}$$

Кроме того,

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \geq 0. \tag{8}$$

Предположим, $\beta = 0$. Тогда, т.к. все $\beta_j \geq 0$, то $\beta_j = 0, \quad \forall j = \overline{1, n}$. Из (6) тогда следует, что $\alpha_i = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}$, что противоречит заданию α_i, β_j. Следовательно, $\beta > 0$. Тогда можем составить вектор

$$y = (y_1, \dots, y_n) = (\frac{\beta_1}{\beta}, \dots, \frac{\beta_n}{\beta}) \in Y.$$

Разделим (7) на $\beta > 0$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\beta} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} = a_{i*} y^T \leq 0, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Theorem (о минимаксах)

Какова бы ни была матрица **A**,

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T = \min_y \max_x x\mathbf{A}y^T.$$

Воспользуемся леммой о двух альтернативах. Предположим, выполняется первая, т.е. $\exists \quad x_0 \in X$:

$$x_0 a_{*j} \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

По лемме о смешанных стратегиях имеем:

$$x_0 \mathbf{A} y^T \geq 0 \quad \forall y \in Y.$$

Тогда

$$\max_x \min_y x \mathbf{A} y^T \geq \min_y x_0 \mathbf{A} y^T \geq 0. \tag{9}$$

Пусть теперь выполняется вторая альтернатива, т.е. $\exists \quad y_0 \in x_2$:

$$a_{i*} y_0^T \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Перейдем здесь к смешанным стратегиям, тогда

$$x \mathbf{A} y^T \leq 0 \quad \forall x \in X.$$

Далее получим

$$\min_y \max_x x\mathbf{A}y^T \leq \max_x x\mathbf{A}y_0^T \leq 0. \tag{10}$$

По лемме о двух альтернативах только одно из неравенств (9) или (10) выполняется, т.е. не может выполняться двойное неравенство

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T < 0 < \min_y \max_x x\mathbf{A}y^T. \tag{11}$$

Покажем, что последнее неравенство НЕ МОЖЕТ ВЫПОЛНЯТЬСЯ, для этого рассмотрим матрицу вида

$$\mathbf{A(t)} = \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12}-t & \dots & a_{1n}-t \\ a_{21}-t & a_{22}-t & \dots & a_{2n}-t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-t & a_{m2}-t & \dots & a_{mn}-t \end{pmatrix},$$

где t - произвольное вещественное число.

Рассмотрим

$$x\mathbf{A}(\mathbf{t})y^T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i(a_{ij} - t)y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i t y_j = x\mathbf{A}y^T - t.$$

Запишем неравенство (11) для матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{t})$:

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}(\mathbf{t})y^T < 0 < \min_y \max_x x\mathbf{A}(\mathbf{t})y^T,$$

$$\max_x \min_y (x\mathbf{A}y^T - t) < 0 < \min_y \max_x (x\mathbf{A}y^T - t),$$

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T - t < 0 < \min_y \max_x x\mathbf{A}y^T - t,$$

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T < t < \min_y \max_x x\mathbf{A}y^T.$$

Это неравенство не может выполняться для любого $t \in \mathbb{R}$, т.е. не существует такого вещественного числа, которое находится между минимаксами $\max\limits_x \min\limits_y x\mathbf{A}y^T$ и $\min\limits_y \max\limits_x x\mathbf{A}y^T$.

Это означает, что

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T \geq \min_y \max_x x\mathbf{A}y^T.$$

Однако, для любой матрицы $\mathbf{A}$ также

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T \leq \min_y \max_x x\mathbf{A}y^T.$$

Это означает, что минимаксы равны.

$$\max_x \min_y x\mathbf{A}y^T = \min_y \max_x x\mathbf{A}y^T.$$

Таким образом, для матричных игр всегда существует седловая точка, т.е. такие игры разрешимы в смешанных стратегиях.

В конспект добавить:

Графический метод решения матричной игры, в которой один из игроков имеет только 2 чистые стратегии. (Студенты разбирают на лабораторных занятиях)

Студентам самостоятельно рассмотреть по Крушевскому **итерационные методы** решения матричных игр